



BIOMEHANIKA

France Sevšek



BIOMEHANIKA

France Sevšek

LJUBLJANA, 2018

V10.4 - 180109/I-krim

NASLOV: Biomehanika (druga elektronska izdaja)

AVTOR: dr. France Sevšek

STROKOVNI PREGLED:
dr. Gregor Gomišček

OBLIKOVANJE BESEDILA: dr. France Sevšek

Izdano v samozaložbi

Način dostopa (URL):
<http://www.sevsek.eu/Biomehanika/Knjiga/>

©France Sevšek 2018

Delo je avtorsko zaščiteno. Uporaba zunaj meja avtorskih pravic je brez pisnega soglasja avtorja nedopustna in kazniva. To velja posebno za fotokopiranje, razmnoževanje, prevajanje, mikropreslikave in za vstavljanje, prenos in predelavo v elektronske sisteme. V študijske namene je delo dovoljeno natisniti in kopirati, vendar le za lastne potrebe in samo v originalni obliki.

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in
univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=293279488

ISBN 978-961-288-206-8 (pdf)

Ljubljana, januar 2018

Predgovor

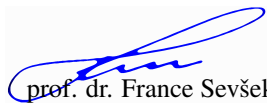
Fizika je filozofija narave. Je najbolj osnovna veja znanosti. Ukvarja se z opisovanjem in pojasnjevanjem naravnih pojavov. V fiziki nas zanima predvsem, kako in zakaj stvari delujejo tako, kot delujejo. Področja njenega proučevanja so med drugim sile in gibanje teles, tekočine, zvok, toplota, svetloba, elektrika in magnetizem ter zgradba snovi, atomov, jeder in vesolja. Visokošolska fizika naj bi zajemala vsa ta področja in naj bi posredovala študentom poleg osnovnih znanj, potrebnih za njihovo smer študija, tudi vedenja, ki sodijo k splošni izobrazbi. Predvsem pa naj bi razvijala znanstven način mišljenja in razumevanja sveta.

Ta učbenik je nastal za pouk osnov biomehanike za študente različnih programov Zdravstvene fakultete, Univerze v Ljubljani. Obsega predvsem uvod v mehaniko, s posebnim poudarkom na njeni uporabi v živih organizmih. Podrobneje so opisani tudi postopki in naprave, s katerimi se bodo študenti srečali pri laboratorijskih vajah iz biofizike. Dodanih je tudi nekaj poglavij o področjih, ki so pomembna za zdravstvene poklice ali splošno izobrazbo, a so v dostopni študijski literaturi slabše obdelana. Vendar pa je marsikaj v tem delu le omenjeno, marsičesa pa sploh ni. Pri študiju teh področij naj bi si študenti, glede na svoj študijski program in po dogovoru s predavateljem, pomagali z drugimi viri. Temu je namenjen tudi seznam literature na koncu knjige, hkrati pa so tam navedeni tudi viri, na podlagi katerih je to delo nastajalo.

Zahvaljujem se vsem, ki so kakorkoli pomagali pri nastanku tega učbenika, predvsem generacijam študentov, ki so do sedaj že uspešno opravili ta program biofizike. Njihov odziv na pouk, izbiro snovi in način predavanja ter izrečene in tihe pripombe ter končno tudi znanje na izpitu, so bistveno vplivali na nastanek tega dela. Posebna zahvala velja dr. Gregorju Gomiščku, ki je aktivno sodeloval pri pripravi nove izdaje tega učbenika. Poleg tega se zahvaljujem tudi dr. Veroniki Kralj-Iglič, ddr. Alešu Igliču in dr. Andreju Iršiču, ki so strokovno pregledali rokopise preteklih izdaj. Prav tako gre zahvala tudi Zdravstveni fakulteti Univerze v Ljubljani, ki je izdala prvo verzijo tega učbenika.

Kljub vsej skrbi pa je v tem delu nedvomno ostalo še precej napak, nedoslednosti in možnosti za izboljšavo. Zato prosim vse bralce, da svojih pripomb in predlogov ne obdrže zase, ampak mi jih pošljejo na naslov: france.sevsek@zf.uni-lj.si. Le tako bo lahko naslednja generacija študentov dobila boljši učbenik. Dodatno gradivo in morebitne popravke pa si lahko ogledate na spletnih straneh <http://www.zf.uni-lj.si/fizika>.

Ljubljana, januar 2018



prof. dr. France Sevšek

Vsebina

1	UVOD	9
1.1	Znanost	10
1.2	Biomehanika	10
1.3	Kratka zgodovina biomehanike	11
1.4	Metode biomehanike telesa	11
1.5	Točka v prostoru	12
2	MERITVE	15
2.1	Enote	16
2.2	Prikaz meritev	18
2.3	Števila in računanje	19
2.3.1	Eksponentni zapis števil	19
2.3.2	Funkcije	19
2.3.3	Enačbe in neenačbe	20
2.4	Merske napake	21
2.5	Analiza meritev - osnove statistike	23
2.5.1	Porazdelitev meritev	24
2.6	Povzetek	28
2.7	Vprašanja	29
3	GIBANJE	33
3.1	Uvod	34
3.2	Zenon, Ahil, želva in gibanje	35
3.3	Pot, hitrost in pospešek	36
3.4	Enakomerno pospešeno gibanje	38
3.5	Prosti pad	40
3.6	Galileo Galilei	40
3.7	Sestavljeno gibanje	42
3.7.1	Enostavno sestavljeno gibanje	42
3.7.2	Vodoravni met	45

3.7.3	Navpični met	47
3.7.4	Poševni met	48
3.8	Kroženje	49
3.8.1	Enakomerno kroženje	50
3.8.2	Enakomerno pospešeno (pojemajoče) kroženje	52
3.9	Povzetek	54
3.10	Vprašanja	55
4	STATIKA	57
4.1	Sila	58
4.2	Navor	59
4.3	Navor ali moment?	60
4.4	Statika – telesa v mirovanju	61
4.5	Vzvodi	61
4.6	Statika človeškega telesa	62
4.6.1	Sile na hrbtenico pri predklonu	62
4.6.2	Dviganje bremen	65
4.6.3	Sila na glavo stegenice pri enonožni stoji	66
4.7	Nošnja bremen	68
4.7.1	Načini nošnje bremen	70
4.8	Škripci	70
4.9	Povzetek	72
4.10	Vprašanja	73
5	TEŽIŠČE	75
5.1	Teža	76
5.2	Težišče	76
5.3	Stabilnost	76
5.4	Določanje težišča telesa	77
5.4.1	Določanje težišča telesa z obešanjem	78
5.4.2	Starejši načini določanja težišča človeškega telesa	78
5.4.3	Stabilometrija	79
5.5	Določanje skupnega težišča več telesnih delov	80
5.6	Vprašanja	83
6	ELASTIČNOST: SILA IN DEFORMACIJE	85
6.1	Deformacije pri nategu ali tlaku	86
6.2	Deformacije pri upogibu	89
6.2.1	Matematična izpeljava deformacije pri upogibu	91
6.3	Torzijske deformacije	92
6.3.1	Primer: torzijski zlom golenice	93
6.4	Strižne deformacije	94

6.5	Povzetek	95
6.6	Vprašanja	96
7	DINAMIKA	99
7.1	Uvod	100
7.2	Prvi Newtonov zakon	100
7.3	Drugi Newtonov zakon	102
7.4	Tretji Newtonov zakon	105
7.5	Gibalna količina	107
7.6	Trki	108
7.7	Vrtenje	109
7.8	Vrtilna količina	115
7.9	Povzetek	116
7.10	Vprašanja	117
8	TRENJE	119
8.1	Lepenje	120
8.2	Trenje	122
8.3	Nekaj praktičnih primerov	123
8.3.1	Premikanje težkih predmetov	124
8.3.2	Biomehanika plezanja kamina	125
8.4	O podplatih pohodnih in plezalnih čevljev	128
8.5	Povzetek	129
8.6	Vprašanja	129
9	DELO IN ENERGIJA	131
9.1	Delo	132
9.2	Potencialna energija	134
9.3	Kinetična energija	135
9.4	Delo in elastična energija	135
9.5	Ohranitev energije	136
9.6	Moč	136
9.7	Povzetek	138
9.8	Vprašanja	139
10	NIHANJE	141
10.1	Uvod	142
10.2	Vzmetno nihalo	142
10.2.1	Energija vzmetnega nihala	145
10.3	Matematično nihalo	146
10.4	Fizično nihalo	148
10.5	Torzijsko nihalo	151

10.6 Dušeno nihanje	152
10.7 Vsiljeno nihanje	154
10.8 Povzetek	157
10.9 Vprašanja	158
11 TEKOČINE	161
11.1 Gostota	162
11.2 Tlak v mirujoči tekočini	164
11.3 Blaise Pascal	166
11.4 Hidrostatični tlak	166
11.5 Zračni tlak	168
11.6 Vzgon	170
11.7 Arhimed iz Siracuse	172
11.8 Površinska napetost	173
11.8.1 Merjenje površinske napetosti z zanko	174
11.8.2 Kapilarni dvig	175
11.8.3 Kapljice in mehurčki	176
11.9 Gibanje tekočin	179
11.10 Viskoznost	185
11.10.1 Turbulenca in Reynoldsovo število	185
11.10.2 Tok viskozne tekočine v cevi	188
11.10.3 Upor tekočine	189
11.10.4 Določanje koeficienta viskoznosti s kapilarnim viskozimetrom	190
11.10.5 Določanje koeficienta viskoznosti z merjenjem hitrosti padanja kroglice v tekočini	191
11.10.6 Dodatek: izračun hitrosti padanja v sredstvu	192
11.11 Povzetek	194
11.12 Vprašanja	195
12 ZVOK	201
12.1 Izvor zvoka	202
12.1.1 Quinckejeva piščal	203
12.2 Gibanje zvoka v sredstvu	204
12.3 Zaznava zvoka	205
12.4 Dopplerjev pojav	207
12.5 Ernest Mach in nadzvočna hitrost	210
12.6 Vprašanja	211

13 TEMPERATURA IN TOPLOTA	213
13.1 Temperatura	214
13.1.1 Temperaturna lestvica	215
13.1.2 Toplotno raztezanje snovi	217
13.1.3 Merjenje temperature	218
13.2 Plini	220
13.3 Toplota	222
13.4 Latentna toplota	226
13.4.1 Človek in okolica	229
13.5 Temperatura zmesi	229
13.6 Prevajanje toplote	232
13.7 Povzetek	236
13.8 Vprašanja	237
14 SVETLOBA IN OPTIKA	241
14.1 Uvod	242
14.2 Lom svetlobe	242
14.3 Leče	246
14.4 Krogelna in barvna napaka leč	249
14.5 Krogelno in barvno korigirani objektivi	250
14.6 Mikroskop	251
14.6.1 Preprost mikroskop	251
14.6.2 Sestavljen mikroskop	253
14.6.3 Posebne tehnike optične mikroskopije	254
14.7 Odboj svetlobe in zrcala	257
14.8 Vprašanja	262
15 SVETLOBA IN VESOLJE	265
15.1 Hitrost svetlobe	266
15.2 Dopplerjev pojav pri svetlobi	267
15.3 Pogled v nebo	267
15.4 Vprašanja	271
16 LITERATURA	273
Stvarno kazalo	277

1

UVOD



Slika 1.1: Testiranje ravnotežja

1.1 Znanost

Vsa znanost temelji na opazovanju sveta. Vendar se ne zadovolji le s preprostim opisom pojavov, ampak jih poskuša medsebojno povezati in iz njih izluščiti splošne zakonitosti. Preproste zakonitosti, ki obsegajo le omejeno vrsto pojavov, pogosto imenujemo **principi** (npr. Arhimedov princip, princip vzvodov itn.). Za bolj splošno veljavna spoznanja pa velikokrat uporabljamo oznako **zakon** (npr. Newtonov zakon, zakoni termodinamike itn.). Seveda to niso zakoni v pravnem smislu, saj obnašanja sveta ne predpisujejo, ampak ga opisujejo. Ti zakoni tudi niso nespremenljivi. Ko pride znanost do novih spoznanj, lahko te zakone dopolni, drugače izrazi ali spremeni. Oblika in vsebina naravnih zakonov izhajata iz **teorije**, s katero poskušamo pojasniti naravne pojave. Teorija naj bi na čim bolj enostaven, a popoln način razložila opazovane pojave in povezave med njimi. Ker od teorije po navadi zahtevamo, da nam tudi kvantitativno (količinsko, številsko) pojasni opisane pojave, imajo fizikalne teorije pogosto matematično obliko.

Ko poskuša znanost razumeti naravne pojave, si pogosto pomaga z modelom. **Model** je nekakšen poenostavljen opis danih pojavov. S pojmi in predstavami, ki jih dobro poznamo, poskušamo razložiti nov, bolj zapleten pojav. Pri tem upoštevamo le splošne in najbolj pomembne lastnosti opazovanega sistema, ne bistvene podrobnosti pa zanemarimo. Model nam omogoči, da si z analogijo predstavljamo zapletene pojave. Pogosto nam to omogoči globlja spoznanja, spomni nas na nove poskuse in povezave med različnimi pojavi. Modeli niso nikoli popolni in znanstveniki vseskozi poskušajo najti primernejše in bolj izpopolnjene modele. Tako je na primer atomski model sveta nastal v stari Grčiji, ko so si svet predstavljali zgrajen iz nedeljivih delčkov, atomov. Veliko pozneje so poskušali lastnosti snovi opisati s "planetarnim modelom" atomov, atom so si predstavljali kot jedro, okoli katerega krožijo elektroni, podobno kot planeti okoli Sonca. Ta model je bil preveč preprost, da bi lahko pojasnil vse lastnosti atomov. Zato si danes raje predstavljamo gradnike atomov kot valovanje.

1.2 Biomehanika

Mehanika je nauk o silah in njihovem učinku. Biomehanika pa je veda, ki uporablja zakone mehanike za proučevanje živih bitij. Glede na to, kaj opazujemo, lahko razdelimo biomehaniko na različne ravni:

- Celična raven, kjer proučujemo mehanske lastnosti celic, njihovih membran itn.
- Na ravni tkiv opazujemo posamezna tkiva (kosti, mišičje itn.), njihove funkcije in mehanske lastnosti.

- Biomehaniko uporabljamo tudi na ravni sistemov. Proučujemo lahko npr. krvna obtočila, dihala, sluh itn.
- Pogosto pa nas zanima tudi živo bitje kot celota, njegovo gibanje, sile med posameznimi deli telesa ipd. Mehanika človeškega telesa uporablja fizikalne zakone za popis človeškega telesa v mirovanju in gibanju.

Mehaniko lahko razdelimo še na statiko in dinamiko. Statika proučuje telesa v mirovanju, dinamika pa njihovo gibanje. Reologija pa je veda o deformacijah in pretakanju snovi.

Pri mehanskem opisu živih bitij uporabljamo mnoge poenostavitve. Poskušamo namreč spoznati osnovne zakone, ki so pomembni pri posameznih pojavih. Ti zakoni pa so splošni. Tako npr. vsako gibanje človeškega telesa zaradi ohranjanja stabilnosti zahteva natančno kontrolo porazdelitve mase. Pri povsem različnih opravilih lahko zato opazimo zelo podobne gibe. Spremembo smeri gibanja dosežemo na enak način pri drsanju, kot pri igranju žogo, pa tudi gibi pri zabijanju količka, igranju golfa ali sekanju drv so si podobni.

1.3 Kratka zgodovina biomehanike

Zdravniki in anatomi so vedno proučevali gibanje. Zdravnik rimskih gladiatorjev Galen (131-201) je ugotovil, da gibanje v sklepih nastane zaradi krčenja mišic.

Leonardo da Vinci je v 16. stol. prišel do spoznanja, da za človeško telo veljajo prav taki zakoni mehanike, kot za nežive predmete.

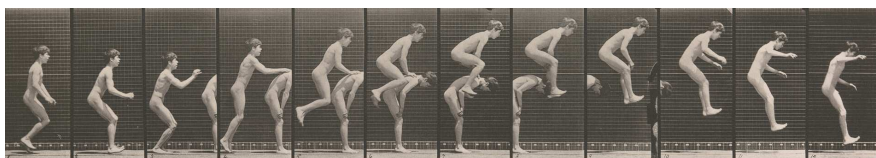
Borelli je v 17. stol. napisal knjigo o gibanju živali. Spoznal je tudi pomen določitve težišča telesa.

Z odkritjem fotografije je biomehanika dobila pomemben pripomoček. Leta 1877 je Eadweard Muybridge z večjim številom (12 in 25) fotografskih kamer z električnim proženjem analiziral tek konja. Postopek je nato razširil na analiziranje zelo različnih oblik gibanja ljudi in živali (slika 1.2).

Razvila se je kronofotografija, ki uporablja snemanje na film in natančno merjenje časa. Pogosto pri analizi gibanja uporabljamo tudi stroboskop. Z njim lahko na isto sliko posnamemo zaporedje gibov v enakih časovnih presledkih. Danes pa se uporablja predvsem video tehnika. Delo z video kamerami je zelo enaostavno, so občutljive, nastalo sliko pa lahko nato tudi računalniško obdelujemo in analiziramo.

1.4 Metode biomehanike telesa

Telo si predstavljamo sestavljeno iz segmentov, ki se stikajo v sklepih. Antropometrični podatki za posamezne dolžine telesnih segmentov so prikazani na sliki 1.3 kot delež celotne telesne višine (H).



Slika 1.2: Eadweard Muybridge je uporabil večje število fotografskih kamer za slikanje gibanja ljudi pri različnih aktivnostih.

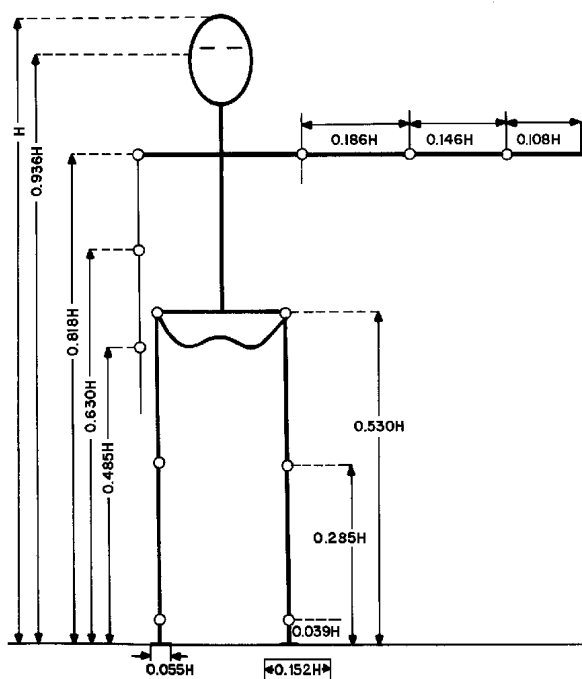
Kadar imamo za skupino ljudi, ki nas zanima, na razpolago antropometrične podatke, tj. podatke, ki so jih dobili z meritvami pri večjem številu ljudi, jih bomo seveda uporabili. Pogosto pa takih podatkov nimamo ali pa nas ne zanimajo natančni rezultati, ampak le kvalitativne zveze. Tedaj si lahko pomagamo tudi z več ali manj preprostimi konstrukcijami. Te so se uveljavile predvsem v slikarstvu, nastajale pa so vseskozi v zgodovini, ko so ljudje poskušali ugotoviti pravilnosti in zakonitosti v zasnovi človeškega telesa.

1.5 Točka v prostoru

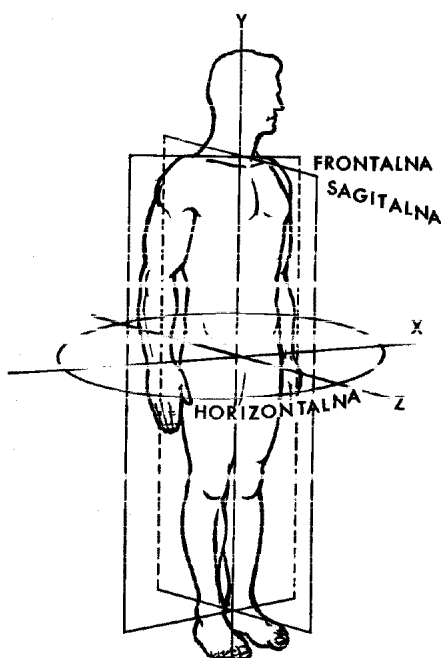
Lego točke v prostoru določimo glede na izbrani koordinatni sistem. Najpogosteje uporabljamo pravokotni koordinatni sistem. Kadar nas zanima lega točke v ravnini, koordinatni sistem sestavljata dve koordinatni osi (x in y), ki se sekata v koordinatnem izhodišču. Za opis lege točke v prostoru pa potrebujemo tri koordinatne osi (x , y , z).

Človeško telo v pravokotnem koordinatnem sistemu je prikazano na sliki 1.4.

Včasih, predvsem kadar nas zanima vrtenje, pa uporabimo polarni koordinatni sistem. Tu je lega točke določena z razdaljo od koordinatnega izhodišča in z enim ali dvema kotoma.



Slika 1.3: Dolžine posameznih segmentov kot delež celotne telesne višine (H)



Slika 1.4: Človeško telo v koordinatnem sistemu. Poleg osi (x,y,z) so označene tudi tri glavne ravnine.

2

MERITVE



Slika 2.1: V gorah je navada, da merimo razdalje v urah.

Tabela 2.1: Osnovne enote SI

Količina	Enota	Oznaka
dolžina	meter	m
čas	sekunda	s
masa	kilogram	kg
električni tok	amper	A
temperatura	kelvin	K
množina snovi	mol	mol
svetilnost	kandela	cd

Tabela 2.2: Nekatere predpone za mnogokratnike osnovnih enot

Predpona	Oznaka	Vrednost
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

2.1 Enote

Vsaka meritev je primerjanje merjene količine z izbrano enoto. Zato je lahko meritev le tako natančna, kot je natančno določena enota. Danes je v rabi mednarodni sistem enot (Système International), nekdanj imenovan tudi meter-kilogram-sekundni sistem enot. Uporaba teh enot v javnosti je pri nas zakonsko predpisana, čeprav bomo v posebnih primerih še srečali in uporabljali tudi drugačne enote.

Mednarodni sistem enot določa osnovne enote, ki so podane v tabeli 2.1. Vse druge enote so sestavljene iz osnovnih. Kadar merimo količine, ki so zelo različne od osnovne enote, uporabljamo enote, ki so mnogokratniki števila 10 osnovne enote. Imena teh enot tvorimo iz osnovnih s predponami, ki so podane v tabeli 2.2.

Dolžinska enota je meter. Leta 1790 je bil izbran kot ena desetmilijoninka razdalje od Zemljinega ekvatorja do pola. Pozneje so iz posebne zlitine izdelali

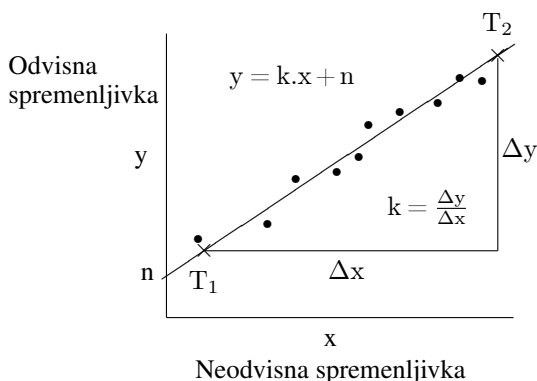
metrsko palico, ki je od leta 1889 služila za natančnejšo definicijo metra. Danes pa je meter določen s hitrostjo svetlobe in sicer kot tista razdalja, ki jo opravi svetloba v praznem prostoru v $1/299792458$ sekunde.

Čas merimo v sekundah. Dolgo je bila sekunda določena tako, da je bil povprečen sončni dan $24 \times 60 \times 60$ sekund. Vrtenje Zemlje pa ni povsem enakomerno. Zaradi vetrov, gibanja voda in porazdelitve ledu se hitrost gibanja Zemlje spreminja. Poleg tega pa se, predvsem zaradi trenja med morjem in zemljo pri plimovanju, Zemlja vse počasneje vrti. Sekunda je danes definirana s frekvenco valovanja, ki ga seva atom cezija pri prehodu med dvema izbranimi stanjema. Vendar pa je izbrana tako, da ustreza povprečnemu sončnemu dnevu leta 1900. Do danes se je vrtenje Zemlje že toliko upočasnilo, da morajo vsako leto dodati eno sekundo – po navadi podaljšajo zadnjo minuto v letu na 61 sekund.

Za merjenje **mase** še vedno uporabljamo staro enoto. Kilogram je definiran kot masa valja iz zlitine platine in iridija, ki ga hranijo v Mednarodnem uradu za mere in uteži v Parizu. Za atomske meritve pa uporabljajo kot enoto maso ogljikovega atoma. En mol ogljika tehta natančno 12 gramov in vsebuje Avogadrovo število ($6,02214 \times 10^{23}$) atomov. Vendar Avogadrovega števila še niso uspeli izmeriti dovolj natančno, da bi bila atomska definicija mase tudi splošno uporabna.

Tabela 2.3: Primer časovne odvisnosti frekvence srčnega utipa pri ohlajanju športnika po telesni aktivnosti

Čas [s]	Frekvenca srčnega utipa [min ⁻¹]
5	167
10	166
15	166
20	165
25	163
30	162
35	161
40	159
45	158
50	156
55	155
60	154



Slika 2.2: Primer grafa linearne funkcije $y = k.x + n$, narisane skozi izmerjene točke. Iz premice določimo smerni koeficient (k).

2.2 Prikaz meritev

Rezultate meritev lahko podamo v obliki tabele ali ponazorimo z grafom. Kot primer prikazuje tabela 2.3, kako se s časom zmanjšuje frekvenca srčnega utripa pri ohlajanju športnika po telesni aktivnosti. V glavi tabele smo napisali, kaj prikazuje posamezen stolpec in v katerih enotah smo merili.

Graf pa je slikovni prikaz odvisnosti med količinami. Glede na to, koliko količin prikazujemo in kaj želimo poudariti, lahko uporabimo različne vrste grafov: enostavni, stolpičasti, okrogli itn. Pogosto namesto besede graf uporabljamo tudi izraz diagram. Slika 2.2 je primer enostavnega grafa. Na navpično os smo nanesli vrednosti spremenljivke, ki je odvisna od količine, katere vrednosti predstavlja vodoravna os diagrama. Pogosto sta ti dve količini enostavno povezani, ali pa vsaj naše meritve niso dovolj natančne, da bi lahko pokazale kakšno bolj zapleteno odvisnost. V takem primeru lahko naše merske točke v diagramu ponazorimo s premico. To narišemo tako, da gre čim bolj enakomerno skozi področje narisanih točk. Za ti dve količini smo torej privzeli, da sta linearno odvisni. Splošna enačba premice je:

$$y = k x + n, \quad (2.1)$$

kjer je n vrednost odvisne spremenljivke y v točki, kjer premica seka navpično os. Smerni koeficient premice (k) pa lahko določimo iz narisane grafa, tako da izberemo dve poljubni točki na premici (npr. T_1 in T_2 na sliki 2.2), določimo njuni koordinati in izračunamo:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Na sliki 2.2 smo premico skozi merske točke narisali kar "na oko". Lahko pa to opravi namesto nas tudi računalnik. Ta operacija se po navadi skriva pod oznako "linearna regresija" in določi parametra premice (k in n), ki najboljše popiše merske točke. Matematični postopek, ki se skriva pod to oznako, je sorazmerno preprost. Parametra izberemo tako, da je vsota kvadratov razlik med izračunanimi (y_i) in izmerjenimi (Y_i) vrednostmi najmanjša:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - Y_i)^2 = \text{minimum.} \quad (2.2)$$

2.3 Števila in računanje

2.3.1 Eksponentni zapis števil

Pri zapisovanju števil in računanju nam pogosto pride prav eksponentni zapis. Ta je primeren posebno za števila, ki imajo veliko ničel pred decimalno vejico ali pa za njo. Tako število najlažje zapišemo kot števiko, pomnoženo z 10 na ustrezno potenco.

Tako bomo na primer število 0,001 zapisali kot 10^{-3} in 25000000 kot $2,5 \times 10^7$. Množenje smo zaradi preglednosti označili kot $\times$, po navadi pa za to uporabimo piko, ki jo lahko pišemo tudi na sredini vrstice (na primer: $2,5 \cdot 10^7$). Pri zapisu decimalnih števil uporabljamo decimalno vejico, čeprav vse večja uporaba računalnikov povzroča, da pogosto srečujemo namesto nje decimalno piko.

Eksponentni zapis nam pogosto olajša računanje. Pri tem uporabimo pravila:

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}, \quad 10^n \times 10^k = 10^{n+k}, \quad (10^n)^k = 10^{n \times k}$$

Primer 2.1

$$\frac{22000 \times 0,01}{2000} = \frac{2,2 \times 10^4 \times 10^{-2}}{2 \times 10^3} = \frac{2,2}{2} \times 10^{(4-2-3)} = 1,1 \times 10^{-1} = 0,11$$

• • •

2.3.2 Funkcije

Če vsaki vrednosti spremenljivke x ustreza vsaj ena vrednost spremenljivke y , potem pravimo, da je y funkcija x . To lahko krajše zapišemo: $y = y(x)$. Spremenljivko x imenujemo neodvisno spremenljivko, y pa je odvisna spremenljivka.

Preprost primer funkcije je linearna funkcija, ki smo jo že srečali na strani 18 in jo podaja enačba 2.1.

Primer 2.2

Izračunajmo vrednost funkcije: $y = 3x^2 + 2$, kadar je vrednost neodvisne spremenljivke 2.

V gornjo enačbo vstavimo namesto x vrednost 2 in dobimo $y(2) = 14$, saj je $3 \times 2^2 + 2 = 14$.

Z $y(2)$ smo označili vrednost funkcije y pri $x = 2$.



2.3.3 Enačbe in neenačbe

Enačbe so trditve, ki jih zapišemo v obliki $A = B$. Torej, leva stran enačbe (A) je enaka desni strani (B). Enačba seveda še vedno velja, če obe strani pomnožimo ali delimo z istim številom, ki pa ne sme biti nič. Lahko pa isto število tudi prištejemo ali odštejemo na obeh straneh.

Enako velja tudi za neenačbe. To so trditve oblike $A > B$ ali $A < B$, kjer pomenita simbola $>$ in $<$ večji in manjši.

Primer 2.3

Oglejmo si primer neenačbe.

$$2x + 3 < 9.$$

Od leve in desne strani odštejemo 3 in dobimo $2x < 6$. Če še obe strani delimo z 2 je rezultat: $x < 3$.

$$5 - 4x > 25.$$

Po odštevanju števila 5 dobimo: $-4x > 20$. Delimo sedaj neenačbo z -4 in nam ostane: $x < 5$. Ker smo delili neenačbo z negativnim številom, smo obrnili tudi smer neenačaja.



2.4 Merske napake

Vsaka meritev je le omejeno natančna. Pri meritvah namreč vedno prihaja do napak. Te so lahko slučajne ali pa sistematične.

Oglejmo si primer. Izmeriti želimo telesno višino kot funkcijo teže študentov prvega letnika fizioterapije. Višino merimo na primer z merilom, ki ima na skali označene le centimetre. Zato pri taki meritvi nujno zaokrožimo izmerjene vrednosti na 0,5 cm in pri tem lahko naredimo prav toliko napake. Poleg tega pa je telesno višino vedno težko natančno odčitati. Včasih odčitamo malo preveč, včasih pa premalo, vse to pa je še odvisno od telesne držbe merjene osebe. Vse te napake so povsem slučajne. Zanesljivost izmerjenih vrednosti lahko zato izboljšamo, če meritev večkrat ponovimo in izračunamo povprečne vrednosti. Sistematičnih napak pa na ta način ne moremo odpraviti. Če je na primer pri tehtanju ničla tehtnice napačno nastavljena, tako da tehtnica vedno kaže premalo, bodo vse izmerjene vrednosti premajhne. Sistematične napake lahko nastanejo tudi zaradi napake v postopku meritve – človek, ki odčitava vrednosti, na primer vedno gleda skalo tehtnice od strani ipd.

Pri natančnih meritvah velja zato pravilo, da poleg podatka vedno navedemo tudi pričakovano napako. Na primer: dolžina = 12 cm ± 1 cm. To pomeni, da je dolžina lahko tudi 11 cm ali pa 13 cm.

Običajno pa se pri navajanju rezultatov držimo pravila zanesljivih mest. To pomeni, da podatke zapišemo s tolikimi številskimi mesti, da je predzadnja podana številka zanesljiva, zadnja pa že dvomljiva. Če torej napišemo, da je dolžina 12 cm, potem to pomeni, da je dolžina lahko tudi blizu 13 cm ali pa 11 cm. Podatek 12,5 cm pa lahko pomeni tudi 12,45 cm ali pa 12,55 cm.

Pri kakršnem koli računanju s podatki moramo vedno paziti na število zanesljivih mest v rezultatu. Če na primer želimo izračunati ploščino pravokotnika s stranicama $a = 2,1$ cm in $b = 12,25$ cm, dobimo:

$$A = 2,1 \text{ cm} \times 12,25 \text{ cm} = 25,725 \text{ cm}^2 = 26 \text{ cm}^2.$$

Rezultat smo zaokrožili le na dve mesti, ker ima podatek, ki je najmanj natančen (2,1), tudi le toliko mest.

Kadar števila množimo ali delimo, moramo rezultat zaokrožiti na toliko mest, kot jih ima najmanj natančen podatek.

Primer 2.4

Oglejmo si še kakšen primer.

$$\frac{1,648}{0,023} = 72$$

Število 1,648 ima štiri zanesljiva mesta, 0,023 pa le dve. Rezultat deljenja smo zato zaokrožili na dve mesti.

$$20 \times 8,416 = 168,32$$

Števila, ki so povezana s štetjem (in ne z merjenjem), so natančna in imajo neskončno število zanesljivih mest. Če je število 20 tako število in ima 8,416 štiri mesta, lahko rezultat zapišemo tudi na štiri mesta natančno.

• • •

Pri seštevanju ali odštevanju pa moramo upoštevati le število decimalnih mest, to je število za decimalno vejico. Na primer:

$$\begin{array}{r} 12,25 \text{ cm} \\ +2,1 \text{ cm} \\ \hline 14,35 \text{ cm} \end{array} = 14,4 \text{ cm}$$

Vidimo, da je v drugem podatku številka 1 že nezanesljiva, zato je nezanesljiva tudi številka 3 v rezultatu. Vsoto smo zato zaokrožili le na eno mesto za decimalno vejico.

Kadar števila seštevamo ali odštevamo, moramo rezultat zaokrožiti na toliko mest za decimalno vejico, kot jih ima najmanj natančen podatek.

Primer 2.5

Izračunajmo:

$$3,16 + 2,7 = 5,9$$

Prvo število ima dve mesti za decimalno vejico, drugo pa samo eno, zato smo rezultat zaokrožili na eno decimalno mesto.

$$83,42 - 72 = 11$$

Ker drugo število nima decimalnih mest, smo tudi rezultat zaokrožili na nič decimalnih mest.

$$10 - 2,5 = 7,5$$

Če je 10 posledica štetja in je zato neskončno natančno, lahko rezultat zaokrožimo na eno decimalno mesto. Če pa bi bilo število 10 posledica meritve, bi seveda morali račun zaokrožiti na nič mest in bi bil rezultat 8.

• • •

2.5 Analiza meritev - osnove statistike

Naredili smo N meritev in pri vsaki od njih določili vrednost m_i . Povprečno vrednost ($\bar{m}$) meritev izračunamo kot aritmetično povprečje izmerjenih vrednosti m_i :

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{N}. \quad (2.3)$$

Veliko grško črko sigma (Σ) po navadi uporabimo za označevanje seštevanja. $\sum_{i=1}^N$ pomeni, da moramo sešteti vse vrednosti m_i od $i = 1$ do $i = N$. Torej $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N$.

Primer 2.6

Oglejmo si primer.

Naredili smo štiri meritve frekvence srčnega utripa in dobil vrednosti: 80, 90, 85, 75 utripov na minuto. Torej je $N = 4$ in $m_1 = 80$, $m_2 = 90$, $m_3 = 85$, $m_4 = 75$. Povprečna vrednost frekvence srčnega utipa je zato

$$\bar{m} = \frac{80 + 90 + 85 + 75}{4} = \frac{330}{4} = 83 \text{min}^{-1}.$$

Rezultat deljenja smo zokrožili na tri mesta, saj je tako natančno tudi število 330. Enoto min^{-1} pa seveda lahko preberemo tudi kot "na minuto".

• • •

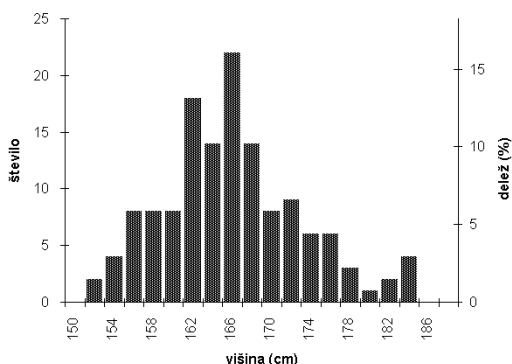
Odstopanje (deviacija) posamezne meritve od povprečne vrednosti je

$$\Delta_i = \bar{m} - m_i. \quad (2.4)$$

Pododobno kot povprečno vrednost meritev, lahko izračunamo tudi povprečno vrednost deviacij. Vendar je njena vrednost vedno enaka nič. Lahko pa izračunamo povprečno vrednost kvadratov odklikov posameznih meritev od povprečne vrednosti. Ta vrednost se po navadi razlikuje od nič in nam predstavlja mero za porazdelitev posameznih vrednosti okoli povprečja.

V matematični statistiki pogosto popišemo porazdelitev izmerjenih vrednosti okoli povprečne vrednosti s standardnim odklonom (standardno deviacijo). Izračunamo jo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta_i^2}{(N-1)}}. \quad (2.5)$$



Slika 2.3: Porazdelitev študentov fizioterapije po višini. Prikazani so podatki za 137 študentov. Ali je to normalna porazdelitev?

To je nekakšna mera za razpršenost meritev. Pri meritvah, ki so naključno porazdeljene okoli povprečne vrednosti, namreč pričakujemo, da bomo dobili približno dve tretjini vseh meritev na intervalu med $\bar{m} - \sigma$ in $\bar{m} + \sigma$.

Kadar imamo na razpolago le majhno število meritev, lahko velikost standardnega odklona preprosto ocenimo po pravilu " $\frac{2}{3}$ meritev". To pomeni, da standardni odklon (σ) izberemo tako, da pade v interval med $\bar{m} - \sigma$ in $\bar{m} + \sigma$ dve tretjini vseh meritev.

Kako pa ocenimo natančnost povprečne vrednosti? To podaja standardna napaka:

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (2.6)$$

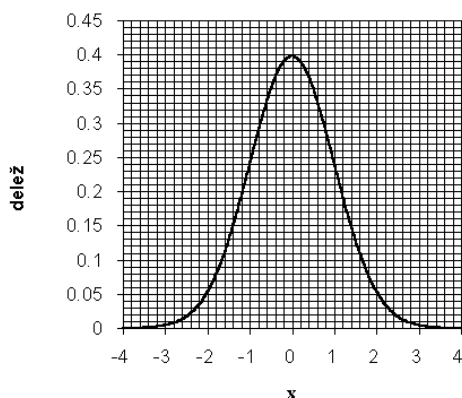
Čim več meritev naredimo, tem manjša je napaka povprečne vrednosti.

Rezultat meritve zato lahko zapišemo kot $\bar{m} \pm S$, kjer je S absolutna napaka meritve. Pogosto pa raje navedemo relativno napako. Tedaj rezultat zapišemo v obliki:

$$\bar{m} \left(1 \pm \frac{S}{\bar{m}} \right). \quad (2.7)$$

2.5.1 Porazdelitev meritev

Če smo naredili veliko meritev, si je smiselno ogledati njihovo frekvenčno porazdelitev, ki pove, kako pogosto se pojavljajo posamezne izmerjene vrednosti. Recimo, da smo naredili N meritev in pri vsaki od njih določili vrednost m_i . Razdelimo sedaj obseg izmerjenih vrednosti na nekaj enakomernih intervalov širine Δ . Za vsak interval ugotovimo, koliko izmerjenih vrednosti je bilo znotraj tega intervala, tj. določimo frekvenčno porazdelitev meritev po intervalih. Kadar na primer merimo višino študentov, lahko za interval vzamemo vrednost $\Delta = 2$ cm in določimo,



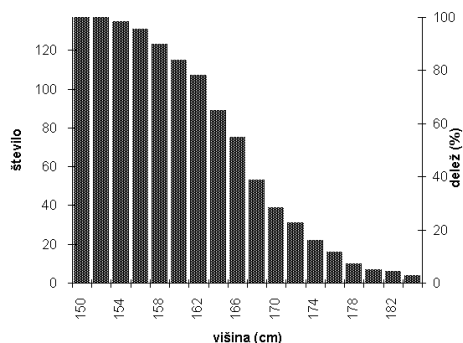
Slika 2.4: Gaussova ali normalna porazdelitev za povprečno vrednost $\bar{x} = 0$ in $\sigma = 1$

koliko študentov ima višino med 170 cm in 172 cm, med 172 cm in 174 cm itn. Rezultate narišemo v obliki stolpičastega grafa (histograma). Za vsak interval narišemo stolpec, katerega višina ustreza številu izmerjenih vrednosti na tem intervalu. Primer takega grafa je prikazan na sliki 2.3. Višine stolpcev pa so seveda odvisne od celotnega števila meritev. Če bi naredili več meritev, bi bilo tudi v vsakem intervalu ustrezno večje število meritev. Zato je veliko lepše, če namesto števila meritev na danem intervalu izračunamo njihov delež glede na celotno število meritev. Na sliki 2.3 so na primer podani rezultati 137 meritev. Vidimo, da je višino med 166 in 168 cm imelo 22 študentov. Torej je delež na tem intervalu $22/137 = 0,16$, oziroma 16 %.

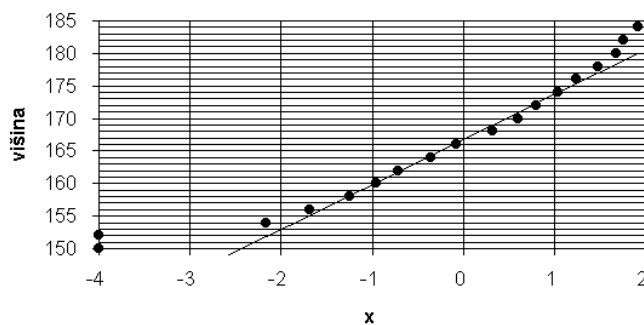
Porazdelitev na sliki 2.3 je videti precej simetrična glede na povprečno vrednost. Take porazdelitve so zelo pogoste, kadar imamo opravka s slučajnimi vplivi. Velikokrat lahko tako simetrično porazdelitev popišemo z enostavno zvonasto krivuljo, ki je prikazana na sliki 2.4. Tako obliko porazdelitve imenujemo **Gaussova porazdelitev** (po nemškem matematiku Karlu Friderichu Gaussu), zanjo pa se uporablja tudi oznaka normalna porazdelitev, čeprav ni v medicinskem smislu nič bolj normalna od drugih možnih porazdelitev. Vendar pa ima normalna porazdelitev zelo pomembno vlogo pri statistični analizi meritev. Normalno porazdelitev namreč določata le dva parametra: povprečna vrednost $\bar{m}$ in standardni odklon (standardna deviacija) σ . Matematično zapišemo število meritev na danem intervalu kot

$$\Delta N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.8)$$

Včasih je iz frekvenčne porazdelitve težko ugotoviti, kako dobro meritve ustrezajo Gaussovi porazdelitvi. Tedaj si lahko pomagamo tako, da namesto števila meritev na danem intervalu določimo za vsako vrednost število vseh meritev, ki so



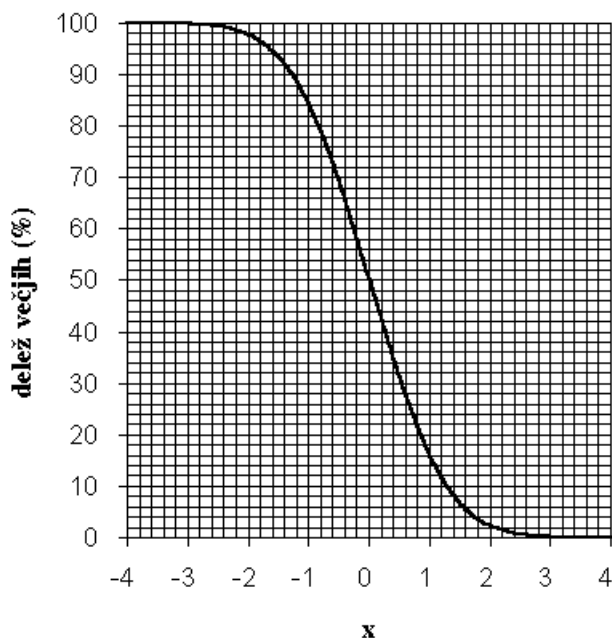
Slika 2.5: Število študentov, ki so višji od dane vrednosti



Slika 2.6: Linearizirana porazdelitev števila študentov, ki so višji od dane vrednosti. Prikazana premica seka ordinatno os pri 167 cm, kar je povprečna vrednost izmerjenih višin.

večje ali enake tej vrednosti. Slika 2.5 prikazuje število študentov, katerih višina je večja od dane vrednosti. Vidimo, da je bilo vseh 137 študentov večjih od 150 cm, a od teh le 22 višjih od 174 cm.

Če narišemo tak graf za Gaussovo krivuljo, dobimo sliko 2.7. Podobnost te slike s porazdelitvijo višin (sl. 2.5) je precejšnja. Še vedno pa ne moremo vedeti, kako dobro se ti dve porazdelitvi ujemata. Pomagamo si z linearizacijo merjene porazdelitve. To pomeni, da poskušamo porazdelitev narisati tako, da dobimo linearno odvisnost (premico), kadar je izmerjena porazdelitev Gaussova. Na ordinatno os nanese meritve (višine), vrednosti na abscisi (x) pa določimo s pomočjo slike 2.7. Za vsako meritve (višino) poznamo pripadajoč delež (sl.2.5), temu deležu pa ustrezno vrednost x odčitamo na sliki 2.7. Za višine študentov smo tako dobili



Slika 2.7: Iz Gaussove krivulje izračunana porazdelitev meritev, ki so večje od dane vrednosti za $\sigma = 1$ in $\bar{x} = 0$.

sliki 2.6. Srednji del meritev res lahko popišemo s premico. Vidimo, da prikazana premica seka ordinatno os ($x = 0$) pri 167 cm. To je povprečna vrednost meritev. Standardni odklon pa pove smerni koeficient te premice. Ta je v našem primeru 7 cm. Opazimo tudi, da funkcija na sliki 2.6 ni povsem linearna – začetne in končne točke ne leže na isti premici, kot srednje. Iz tega lahko sklepamo, da porazdelitev višin študentov fizioterapije ni povsem Gaussova. Očitno imamo, poleg prevladujoče skupine študentov s približno Gaussovo porazdelitvijo višin okoli 167 cm, še drugo, manj številno skupino z višinami okoli 180 cm. Ali lahko pojasniš ta rezultat?

2.6 Povzetek

- Osnovne mehanske količine so čas, dolžina in masa. Merimo jih v sekundah, metrih in kilogramih.
- Pri poimenovanju večjih ali manjših enot si pomagamo s predponami za mnogokratnike števila deset.
- Enačba premice je: $y = kx + n$, kjer je k koeficient premice in n vrednost odvisne spremenljivke y v točki, kjer premica seka navpično os.
- Natančnost meritev navedemo neposredno kot absolutno ali relativno napako ali pa posredno, s številom zanesljivih mest.
- Kadar števila množimo ali delimo, moramo rezultat zaokrožiti na toliko *mest* (vseh!), kot jih ima najmanj natančen podatek.
- Kadar števila seštevamo ali odštevamo, moramo rezultat zaokrožiti na toliko *mest za decimalno vejico*, kot jih ima najmanj natančen podatek.
- Povprečna vrednost N meritev m_i je $\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{N}$.
- Standardni odklon (mera za razpršenost meritev okoli povprečne vrednosti):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{m} - m_i)^2}{(N-1)}}.$$

- Standardna napaka (natančnost povprečne vrednosti):

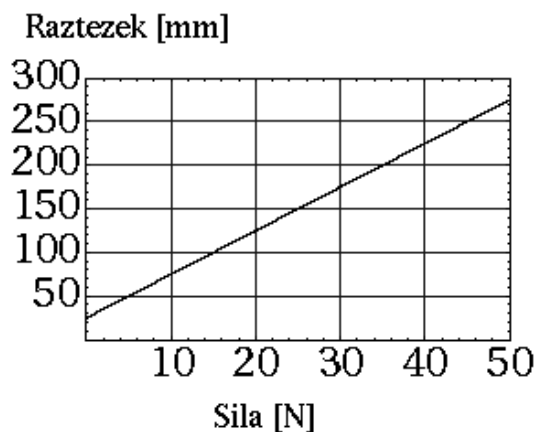
$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Tabela 2.4: Grška abeceda

A	α	alfa	I	ι	jota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kapa	Σ	$\sigma\varsigma$	sigma
Γ	γ	gama	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mi	Υ	υ	ipsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	ni	Φ	ϕ	fi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	ksi	X	χ	hi
H	η	eta	O	$\omicron$	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

2.7 Vprašanja

1. Razmisli, koliko pravih poskusov potrebujemo, da ovrmemo naravni zakon, in koliko, da ga potrdimo.
2. Seznani se z grško abecedo, ki je prikazana v tabeli 2.4.
3. Napiši "*Dober dan*" z grškimi črkami.
4. Komentiraj sliko 2.1. Oцени, kako natančen je podatek na smerni tabli.
5. Pojasni, kako iz osnovnih enot v tabeli 2.1 izpeljemo enoto za silo.
6. Katere količine merimo v svetlobnih letih?
7. S kakšnimi enotami merimo delo in moč? Kaj je 1 kWh?
8. V pomorstvu merijo hitrost ladij v vozlih, v kuharskih receptih pa količine živil v žlicah. Ali poznaš še kakšne nenavadne enote?
9. Hitrost zvoka v zraku je 343 m/s. Koliko km/h je to?
10. Katere naravne pojave bi lahko uporabili za merjenje časa?
11. Nariši graf $y = 15 - 4x$.
12. Nariši graf funkcije $y = 2x^2$.
13. Nariši časovno odvisnost frekvence srčnega utripa, kot jo podaja tabela 2.3 na strani 17. Določi enačbo premice, ki najbolje opiše rezultate meritve.



Slika 2.8: Primer grafa za računsko nalogo: odvisnost raztezka vzmeti od sile

14. Iz diagrama na sliki 2.8, ki podaja odvisnost raztezka vzmeti od sile, določi smerni koeficient premice.

15. Zapiši naslednja števila v eksponentni obliki:

0,0023

2200

0.0001

3000

$\frac{1}{1000}$

$\frac{1}{0,001}$

16. Zapiši vsa števila v ekponentni obliki in izračunaj:

$$4000000 \times 0,00001$$

$$\frac{800000}{0,00002}$$

$$\frac{0,003}{0,001}$$

$$\frac{36000 \times 0,001}{1000}$$

17. Koliko zanesljivih mest imajo naslednji podatki:

14,9 mm

0,00012 kg

4×10^3 kg

$4,0 \times 10^3$ kg

9 hiš

18. Izračunaj in pravilno zaokroži rezultat!

$$83,42 \times 72$$

$$73,24 \times 4,25$$

$$0.018 \times 16.99$$

$$\frac{123,45}{22,1}$$

$$\frac{8123 \times 0,016}{0,0002}$$

$$75,1 - 31,25$$

$$1,02 - 0,001$$

19. Določi vrednosti x , ki ustrezajo naslednjim enačbam:

$$3x - 1 = 5$$

$$x/10 - 1 = 1/2$$

$$\frac{3x+1}{2} = 5$$

20. Kaj pomenijo naslednji zapisi? Napiši vse člene v navedenih vsotah.

$$\sum_{i=1}^4 x_i$$

$$\sum_{j=1}^2 a_j$$

$$\sum_{k=1}^5 m_k^2$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^i$$

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + 2)^2$$

$$\sum_{n=3}^5 a^n$$

21. Iz meritev, podanih v tabeli 2.3 na strani 17, izračunaj povprečno vrednost frekvence srčnega utripa. Izračunaj tudi deviacije posameznih meritev, standardni odklon in standardno napako povprečne vrednosti.
22. Iz enačbe 2.8 določi, kolikšna je višina Gaussove krivulje pri $x = \bar{x}$.
23. Z enačbo 2.8 pojasni na sliki 2.4 pomen standardnega odklona (σ).

3

GIBANJE



Slika 3.1: Sestavljeno gibanje lahko pogosto opazujemo. Curek vode se dviga s stalno hitrostjo poševno navzgor in hkrati pada navzdol zaradi privlačnosti Zemlje.

3.1 Uvod

V tem poglavju bomo spoznali osnove **kinematike**, vede, ki opisuje gibanje. Gibanje je fizikalna lastnost, ki že tisočletja zaposluje človeški um. Svet starih Grkov je bil pravilno urejen, zato statičen in gibanje nikakor ni sodilo vanj. Prišlo je celo tako daleč, da je Zenon z logičnim razmišljanjem dokazoval, da gibanje sploh ni mogoče (glej str. 35).

Iz stare hindujske mitologije prihaja zgodba o kralju Uttanapadu, ki je imel dve ženi. Suniti je bila nežna in skromna in tak je bil tudi njen sin Dhruva. Zato ga je druga Uttanapadova žena Suruchi vedno preganjala in podila proč od očeta. Končno je imel Dhruva dovolj in je prosil boga Vishnu, naj mu pokaže prostor, kjer se mu ne bo treba nikoli več nikomur umikati. Vishnu se ga je usmilil in mu odredil posebno mesto na nebu. Danes ga poznamo pod imenom zvezda Severnica.

Stari narodi so že davno poznali to zvezdo, ki leži v osi Zemlje in se zato dnevno ne vrti skupaj z drugimi nebesnimi telesi. A danes vemo, da os Zemlje ne miruje, ampak v 26 000 letih enkrat opiše plašč ozkega stožca. Zato tudi Severnica ne bo vedno ostala v osi Zemlje in za opazovalca na Zemlji nepremična. Poleg tega pa se giblje tudi sama Severnica. In ne samo ona, gibljejo se galaksije, in končno se giblje vse v vesolju, saj se vesolje širi.

A tudi mikroskopski svet ni statičen. Molekule in atomi v plinih se neprestano gibljejo, se zaletavajo med seboj in v stene ter povzročajo tlak v posodi. Celó v trdnih snoveh atomi nihajo okoli ravnovesnega stanja.

Gibanje je zato ena od osnovnih lastnosti narave. Kljub temu, da je človeštvo vedno iskalo stalno točko v prostoru, je celo bog Vishnu ni uspel najti. Dolgo je veljalo prepričanje, da se nebo vrti okoli Zemlje. Nato je prišlo spoznanje, da Zemlja s planeti vred kroži okoli mirujočega Sonca. A kmalu je postalo jasno, da tudi Sonce ne miruje ...

Zato absolutnega gibanja ni. Vedno lahko govorimo o gibanju le kot o spremienanju lege telesa glede na drugo izbrano telo. Gibanje je relativno. Tako na primer vidimo, ko se vozimo z vlakom, kako drevesa beže mimo okna. Opazovalec ob progi pa bi trdil, da on in drevesa mirujejo, giblje pa se vlak. Kdo ima torej prav?

3.2 Zenon, Ahil, želva in gibanje



V petem stoletju pr. n. š. je v Elei, grškem mestecu na jugu italijanskega polotoka, Parmenides učil, da "kar je, je in česar ni, ni." Ta na videz preprosta trditev je filozofe eleatske šole pripeljala do presenetljivih ugotovitev. Le strogo logično so morali razmišljati. Stvari lahko obstajajo v realnem svetu, pa tudi v naših mislih. Tisto, kar ne obstaja, pa po Parmenidesu ne more obstajati niti v mislih. Svet je zgrajen iz snovi, in sicer tako, da med delčki snovi ni praznega prostora. Pravzaprav Parmenides trdi, da prazen prostor sploh ne more obstajati, saj je to nekaj, kjer ničesar ni in je zato prazen prostor nekaj, česar ni. Če torej med delci snovi ni praznega prostora, se ti tudi ne morejo gibati. Svet je zato nespremenljiv, mirujoč.

Parmenides je imel učenca z imenom Zenon, ki je privedel njegovo teorijo do absurda. Da bi pokazal, kako gibanje sploh ni mogoče, si je izmislil nekaj paradoksov. Paradoksi so primeri, kjer najprej predpostavimo, da teorija, ki jo želimo zavreči, velja, in nato z logičnim sklepanjem pokažemo, da nas taka predpostavka privede do nesprejemljivih zaključkov.

Najbolj znan je Zenonov paradoks o

Ahilu in želvi. Ahil, ki ga vidimo na sliki, je bil v grškem svetu znan kot najhitrejši tekač. "In vendar", je trdil Zenon, "ta junak nikoli ne bi mogel dohiteti niti najpočasnejše želve." Oglejmo si z Zenonovimi očmi Ahila, ki teče za želvo. Preden bo Ahil ujel želvo, mora najprej priti do mesta, kjer je želva sedaj. A medtem se bo želva premaknila naprej, malo sicer, a vendar. In Ahil mora zopet mimo tega mesta, želva pa mu medtem zopet uide naprej. In tako gre to v neskončnost. Vsakokrat, ko pride Ahil do mesta, kjer je želva sedaj, se bo ta medtem že premaknila naprej in je zato nikoli ne bo mogel dohiteti. "Če predpostavimo, da je gibanje mogoče," pravi Zenon, "nas logično sklepanje privede do absurda. Če hočemo obdržati logiko, moramo trditi, da gibanje ni mogoče."

Ta paradoks so kasneje poskušali pojasnjevati na različne načine, saj vendar iz izkušnje vemo, da bi lahko vsakdo, ne samo Ahil, želvo dohitel in tudi prehitel. Kje je torej napaka v Zenonovem sklepanju?

Res mora Ahil opraviti neskončno delčkov poti, preden dohiti želvo, a ti delčki postajajo vse krajši in krajši. In za vsak tak delček poti potrebuje Ahil vedno manj in manj časa. Skupni čas, vsota vseh neskončno mnogo časovnih intervalov, pa je še vedno končen. Saj je tudi Ahilova hitrost, kot jo podaja enačba 3.2, končna.

Zenonov paradoks o poti je še lažje razložiti. Malo posodobljeno bi lahko z Zenonom trdili, da se z avtobusom nikoli ne moremo pripeljati iz Ljubljane v Kranj. Najprej moramo namreč skozi Medvode, ki so na polovici poti. Nato mimo točke na polovici preostale poti in nato zopet mimo točke na polovici preostale poti in tako dalje in dalje v neskončnost. Zato nas Zenon prepričuje, da v Kranj ne bomo nikoli prispeli, saj mo-

ramo prej opraviti neskončno mnogo intervalov poti. Vendar pa nas ogled avtobusnega voznega reda prepriča, da mora biti s tem sklepanjem nekaj narobe. Seveda, končna trditev ne drži. Tudi vsota neskončno mnogo intervalov poti je lahko končna in opravimo jo lahko v končnem času.

Da pa se pojem gibanja res upira želji po preprosto urejenem svetu, nam kaže naslednji Zenonov paradoks. Zamislite si, da sedite ob cesti in opazujete promet. Z leve in desne pritečeta hkrati dva tekača. Ugotovite, da oba tečeta z isto hitrostjo, a v nasprotni smeri. Če pa povprašate tekača, bosta oba trdila, da se jima je nasprotni tekač približeval z dvakrat večjo hitrostjo. Zenon zato trdi, da "je gibanje odvisno od tega, kdo ga opazuje, ni absolutno in zato ne obstaja." Tu nas Zenon seveda ne prepriča, saj smo se že

zdvajaj sprijaznili s tem, da je gibanje vedno relativno in je izmerjena hitrost seveda odvisna od opazovalca.

Filozofija je bila Zenonov poklic, hobi pa politika. A v politiki Zenon očitno ni verjel svojim teorijam o nespremenljivosti sveta. In to ga je drago stalo. Organiziral je namreč vojaško odpravo proti vladarju Elee. Komaj so revolucionarji z Liparskih otokov pripluli do obale pred mestom, že so bili premagani. Sedaj je Zenon lahko dokazal, da je mislil resno, ko je trdil, da je glavna prednost filozofov, da se ne boje smrti. In res kljub mučenju ni izdal svojih sozarotnikov. Pravijo, da je revež, tik preden je v hudih mukah izdihnil, izrekel spoznanje, da "v življenju ne zadostuje le krepost, ampak je potrebna tudi pomoč srečne usode."

3.3 Pot, hitrost in pospešek

Telo, ki se giblje, opravi v določenem času (Δt) pot (Δs). Povprečno hitrost gibanja izračunamo tako, da delimo opravljeno pot s časom¹:

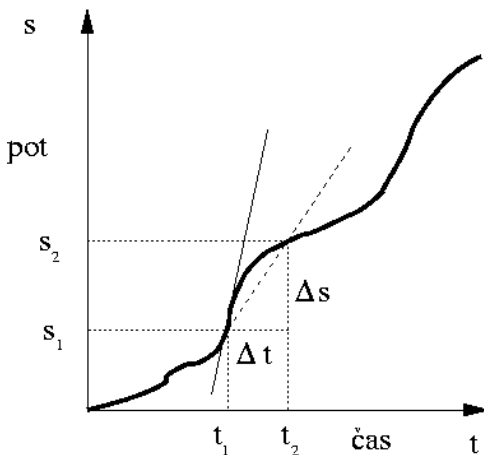
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Primer 3.7

Če na primer 25 km dolgo pot od Ljubljane do Kamnika z avtom prevozimo v pol ure, je povprečna hitrost 50 km/h. Vendar pa se je pri tem hitrost vožnje spreminjala. Nekajkrat smo stali pred semaforjem v križišču, v koloni vozili počasi, po prazni cesti zunaj naselja pa smo vozili veliko hitreje.



¹Grško črko delta (Δ) pogosto uporabljamo za označevanje razlik. Tako nam Δs pomeni razliko poti od začetka do konca opazovanja, to je premik predmeta.



Slika 3.2: Shematski prikaz odvisnosti poti od časa za gibajoče se telo. Ker je to telo opravilo v času Δt pot Δs , je njegova povprečna hitrost v tem času kar smerni koeficient premice, ki je na sliki prikazana črtkano. Trenutno hitrost v izbranem času t_1 pa podaja smerni koeficient tangente v tej točki.

Kako bi torej lahko izračunali trenutno hitrost? To je hitrost v zelo kratkem časovnem intervalu:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.2)$$

Zapis $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ pomeni, da moramo izračunati razmerje $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ v zelo kratkem času, to je, kadar gre Δt proti nič. To smo označili kot $\frac{ds}{dt}$, kjer nam ds in dt pomenita diferenciala oziroma neskončno majhni spremembi. To pa je ravno definicija odvoda. Zato je trenutna hitrost odvod poti po času.

Primer 3.8

Če se na primer neko telo giblje tako, da njegova pot narašča kot kvadratna funkcija časa: $s = \beta t^2$, se njegova hitrost spreminja kot $v = 2\beta t$. Odvod funkcije t^2 po času je namreč $2t$, β pa je konstanta.

• • •

Kadar se hitrost telesa spreminja, je tako gibanje pospešeno. Pospešek je sprememba hitrosti v času. Izračunamo ga z odvajanjem hitrosti po času:

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (3.3)$$

Ker pa izračunamo hitrost z odvajanjem poti po času, vidimo, da dobimo pospešek, če pot dvakrat zaporedoma odvajamo po času. Pospešek je zato drugi odvod

poti po času, kar simbolično zapišemo takole:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Primer 3.9

Izračunajmo, kolikšen je pospešek v prejšnjem primeru, kjer se je hitrost spreminjala kot $v = 2\beta t$. Z odvajanjem dobimo $a = 2\beta$.

• • •

Pot je v splošnem vektorska količina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Zato sta tudi hitrost in pospešek vektorja. Pospešek lahko spremeni ne le velikost, ampak tudi smer hitrosti. Samo kadar obravnavamo premo gibanje, kjer se telo giblje v eni sami smeri, se lahko zadovoljimo le z računanjem velikosti pospeška in hitrosti, kot je prikazano zgoraj.

3.4 Enakomerno pospešeno gibanje

V praksi pogosto naletimo na primere gibanja, kjer se pospešek ne spreminja, je konstanten. Srečamo pa tudi primere, ko se pospešek s časom tako malo spreminja, da lahko te spremembe zanemarimo. Tako gibanje imenujemo enakomerno pospešeno: telo se giblje v ravni smeri in velikost njegovega pospeška se ne spreminja. Zato je trenuten pospešek vedno enak povprečnemu pospešku in velja

$$a = \frac{v - v_0}{t}, \quad (3.5)$$

kjer smo upoštevali, da se je hitrost v času t spremenila od začetne vrednosti v_0 do hitrosti v .

Hitrost se zato s časom linearno spreminja:

$$v = v_0 + at. \quad (3.6)$$

Za izračun opravljene poti pa si pomagamo z enačbo 3.2. Sprememba poti v majhnem času dt je

$$ds = v dt, \quad (3.7)$$

celotno pot pa dobimo z integriranjem vseh prispevkov

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt. \quad (3.8)$$

Z uporabo zveze 3.6 dobimo:

$$s = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt = v_0 t + a \frac{t^2}{2}. \quad (3.9)$$

Ogledali si bomo nekaj računskih primerov enakomerno pospešenega gibanja. Privzeli bomo, da je pospešek $a = 10 \text{ m/s}^2$, kar ustreza prostemu padu (glej stran 40).

Primer 3.10

Izračunajmo, kolikšna je hitrost telesa, ki prosto pada po eni, dveh in treh sekundah!

Ker telesu nismo dali nobene začetne hitrosti, je $v_0 = 0$. Enačba 3.6 nam da zato

$$v = at.$$

Vidimo, da je hitrost po eni sekundi padanja 10 m/s , po dveh sekundah 20 m/s in 30 m/s po treh sekundah.

• • •

Primer 3.11

Izračunajmo še, kolikšno pot opravi padajoče telo v času 1 s , 2 s in 3 s ! Enačba 3.9 nam da

$$s = a \frac{t^2}{2}.$$

Zato takoj ugotovimo, da prosto padajoče telo opravi v času 1 s , 2 s in 3 s poti 5 m , 20 m in 45 m .

• • •

Primer 3.12

Izračunajmo še, s kolikšno hitrostjo bo padel v vodo kamen, ki smo ga spustili z 10 m visokega mostu?

Iz zveze $v = a \cdot t$ izrazimo čas padanja $t = \frac{v}{a}$ in ga vstavimo v enačbo $s = a \frac{t^2}{2}$. Dobimo $s = \frac{v^2}{2a}$, kar nam da končno

$$v = \sqrt{2as}.$$

Torej bo kamen po desetih metrih padanja dosegel hitrost

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}} = 14,1 \text{ m/s}.$$

• • •

3.5 Prosti pad

V prejšnjih računskih zgledih smo obdelali prosti pad kot primer enakomerno pospešenega gibanja. Pri tem nismo nikjer upoštevali mase telesa. Vendar, ali je to sploh prav – ali smo prepričani, da vsa telesa padajo z enakim pospeškom? Kaj ni očitno, da bodo težja telesa padala hitreje kot lažja?

Tako mnenje je veljalo vse do sedemnajstega stoletja, ko je Galileo Galilei opravil svoje prve meritve. Spoznal je, da se pri padanju vsa telesa gibljejo enako – pospešek je enak za vsa telesa in ni odvisen od njihove mase. Ta pospešek imenujemo danes težnostni pospešek ter ga pogosto označujemo s črko g . Njegova vrednost je na površini Zemlje približno 10 m/s^2 . Odvisna je od nadmorske višine, od geografske širine in lokalnih nepravilnosti (npr. vrste kamnine v tleh, bližine gora itd.). Pri nas je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Vendar, če res vsa telesa padajo enako hitro, zakaj potem jabolko pade na tla hitreje kot list papirja? Razlog za to razliko ni v teži predmetov, ampak jo povzroči upor zraka. Ta pa je odvisen predvsem od oblike in velikosti padajočega predmeta, ne pa od njegove teže. Kar pomislimo, kaj bo prej padlo na tla, stokilogramski padalec s padalom ali veliko lažje jabolko, če ju hkrati spustimo iz letala!

3.6 Galileo Galilei



Galileo Galilei (1564–1642) je svojo

mladost preživel v Pisi. Študiral je naravoslovje in se predvsem navduševal za stroge znanstvene preizkuse, ki naj bi potrdili teoretična predvidevanja. Pri svojih poskusih je ohranil še precej grškega veselja do modrovanja, včasih tudi na račun temeljitosti. Pri tem je sledil poti, ki jo je že skoraj dve tisočletji prej pričel Arhimed.

Do prvega velikega odkritja je prišel še kot študent med mašo v pizanski stolnici. Pobožnost mu je zmotilo nihanje lestence, ki so ga zračni tokovi spravljali zdaj v velike in zdaj v majhne nihaje. Galilei je presenetilo, da je bil čas nihanja enak, ne glede na velikost odmika lestence iz mirovne lege. Ker ni imel ure, je svojo domnevo preveril s štetjem srčnega utripa. Spoznanje, da je nihajni čas nihala odvisen le od dolžine vrvice, je potrdil pozneje s štetjem števila vodnih kapljic, ki so padale skozi odprtino v posodi.

Ko se je tako naučil meriti čas, se je lotil proučevanja padanja teles. Tedaj je bilo splošno sprejeto Aristotelovo prepričanje, da težji predmeti padajo hitreje kot lažji, ker si

pač bolj želijo priti v svojo naravno lego, ki je spodaj, na Zemlji, v središču vesolja. Galileo ni mogel meriti prav kratkih časov, zato se je odločil za meritve gibanja predmetov po različno nagnjenih strminah. Ugotovil je, da je pri vseh strminah klancev opravljena pot predmetov sorazmerna s kvadratom časa ($s \propto t^2$) in neodvisna od mase. To se ujema z enačbo 3.9 za enakomerno pospešeno gibanje. Kadar je strmina povsem navpična, tj. kadar je kot 90° , pa je to prosti pad. Galileo je tako sklepal, da se tudi tedaj gibljejo vsa telesa z enakim pospeškom.

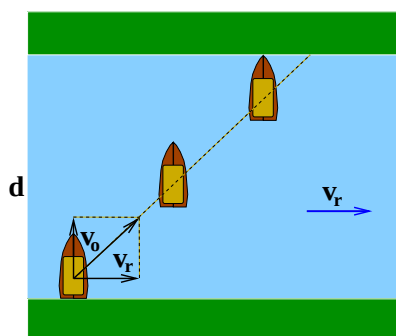
Legenda govori, da je Galileo z vrha poševnega stolpa v Pizi (stran 83) hkrati spustil dve enako veliki, a različno težki topovski krogli. Gledalci pod stolpom naj bi videli in slišali, da sta krogli hkrati prileteli na tla. Žal zgodovinarji o resničnosti te pripovedi močno dvomijo. Vendar to ne zmanjša Galileovega prispevka k znanosti. Je že tako, da v znanosti ne štejejo senzacionalne predstave, ampak dolgotrajni in precizni poskusi, kot so bili na primer Galileovi poskusi na nagnjenih ploskvah. Čeprav Galileo ni bil prvi eksperimentator, so bili njegovi poskusi tako pomembni, da ga štejemo za začetnika sodobne eksperimentalne znanosti.

Ko je Galileo slišal, da so na Holandskem iz leč sestavili povečevalno cev, se je hitro lotil dela in sestavil svoj prvi daljnogled, ki je imel trikratno povečavo. V naslednjih mesecih jih je izdelal še več. Tistega z osemkratno povečavo je podaril beneškemu senatu za opazovanje ladij na morju, teleskop z dvajsetkratno povečavo pa je obrnil proti nebu. Z njim je opazil, da so na Luni gore in da planet Jupiter spremljajo štiri lune. Sklepal je tudi, da so nam planeti veliko bližje kot zvezde. Njegov daljnogled je namreč planete povečal v majhne krogce, zvezde pa so tudi skozi daljnogled ostale le svetle pike. Opazil je tudi, da kaže Venera mene, ki so

bile povsem podobne Luninim. Vse bolj je spoznaval, da nebo ni nekaj popolnega, ampak da so nebesna telesa zgrajena podobno kot naš svet. In ko je leta 1604 na nebu zažarela nova zvezda (bila je eksplozija supernove), tudi v nespremenljivost neba ni več dvomil. Začel je verjeti v Kopernikove zamisli o tem, da Zemlja in planeti krožijo okoli Sonca.

S svojimi nekonvencionalnimi idejami si je nabiral vse več nasprotnikov. Ko pa je začel javno trditi, da Kopernikove teorije niso le priročen računski pripomoček, ampak čista resnica, se ga je lotila inkvizicija. Javno se je moral odpovedati svojim krivoverskim nazorom. Kot pravi legenda, je po preklicu svojih krivoverskih trditev zamrmral: "Eppur si muove!" (In vendar se premika!).





Slika 3.3: Rečna ladja, ki se giblje s hitrostjo v_0 prečno na smer rečnega toka, pristane niže na drugem bregu.

3.7 Sestavljeno gibanje

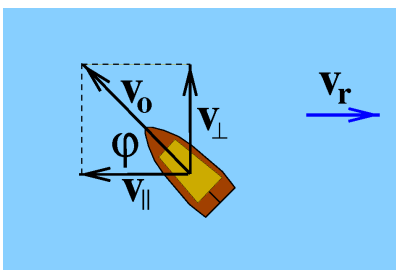
Ko je Nikolaj Kopernik (1473–1543) leta 1543 izdal svojo knjigo *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (O vrtenju nebesnih sfer), v kateri je trdil, da planeti krožijo okoli Sonca, je dvignil val nasprotovanja. Najpomembnejši nasprotni argument je bil, da bi v tem primeru ničesar premičnega ne moglo ostati na Zemlji. Saj je bilo očitno, da bi na vrteči se Zemlji vsakdo, ki bi skočil v zrak, pristal na tleh nekaj metrov stran. Učenjaki šestnajstega in sedemnajstega stoletja so bili še tako prevzeti s starogrško navado sklepanja na podlagi nekaj očitnih osnovnih predpostavk, da se jim ni zdelo potrebno preverjati svojih sklepov s poskusi v realnem svetu. Saj je gibanje vendar nekaj absolutnega in ne more biti sestavljeno iz več različnih gibanj. "Ko da na primer smodnik topovski krogli impulz," so razmišljali, "se krogla giblje, dokler tega impulza ne porabi, potem pa pade na tla."

A zagovorniki Kopernikovega nauka so vedeli, da na primer predmet, ki ga spustimo z vrha jambora jadrnice, pade na krov pod jamborom. Galileo je sklepal, da dobi topovska krogla pri izstrelitvi določeno hitrost, zato se giblje enakomerno dalje v tej smeri. Hkrati pa krogla tudi pada vse hitreje – s konstantnim pospeškom. Torej je gibanje krogle sestavljeno iz dveh gibanj in njena pot ima zato obliko parabole.

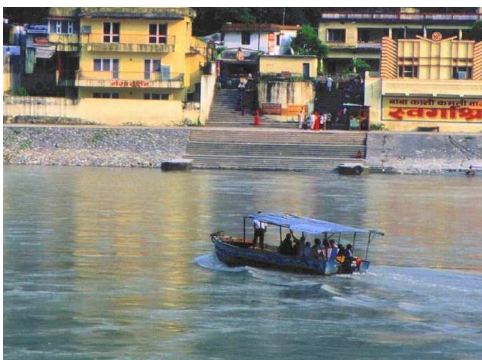
3.7.1 Enostavno sestavljeno gibanje

Gibanje ladje preko reke je nazoren primer sestavljenega gibanja. Ladja pluje v izbrani smeri s hitrostjo v_0 , hkrati pa jo tok reke odnaša navzdol s hitrostjo v_r (slika 3.3). Če je tok reke po vsej širini enak, je tako gibanje ladje enakomerno, saj je sestavljeno iz dveh enakomernih gibanj.

Če bi ladja plula pravokotno na tok reke, bi seveda na nasprotnem bregu pristala niže, kot je začela plovbo. Čas plovbe pa ni odvisen od hitrosti reke in je $T = \frac{d}{v_0}$, kjer je d širina reke. V tem času tok reke odnese ladjo navzdol za razdaljo $x = v_r T$.



Slika 3.4: Rečna ladja se giblje pod kotom φ proti rečnemu toku. Njeno hitrost (v_0) razstavimo v dve komponenti $v_{\parallel}$ in $v_{\perp}$.



Slika 3.5: Čoln za prevoz potnikov preko reke.

Kadar pa ladja pluje poševno navzgor proti toku pod kotom φ , lahko njeno hitrost razstavimo na dve pravokotni komponenti (slika 3.4):

$$v_{\perp} = v_0 \sin \varphi, \quad v_{\parallel} = v_0 \cos \varphi. \quad (3.10)$$

Prva je pravokotna na smer hitrosti reke in skrbi, da pride ladja na drugi breg, druga pa nasprotuje hitrosti rečnega toka.

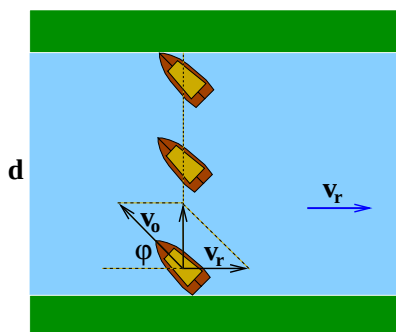
Ladja prečka reko v času $T = \frac{d}{v_{\perp}}$, medtem pa opravi pot v smeri rečnega toka: $x = (v_r - v_{\parallel})T$, kar je

$$x = (v_r - v_{\parallel}) \frac{d}{v_{\perp}}. \quad (3.11)$$

Primer 3.13

Oglejmo si še poseben primer. Na sliki 3.5 vidimo čoln, ki prevažata potnike na drugi breg 600 m široke reke, ki teče enakomerno, s hitrostjo 2 m/s. Izračunajmo, v katero smer mora pluti čoln, da bo pristal natančno na nasprotni strani reke, če je največja hitrost, ki jo zmore motor čolna 4 m/s.

Kot vidimo na sliki 3.6, mora biti smer čolna taka, da bo vektorska vsota njegove hitrosti in hitrosti reke ravno pravokotna na smer rečnega toka. Tedaj



Slika 3.6: Rečna ladja, ki se giblje s hitrostjo v_0 , mora pluti pod kotom φ proti rečnemu toku, da pristane točno na nasprotnem mestu na drugem bregu reke.

bo čoln plul naravnost preko reke in bo pot v smeri toka enaka nič. Zato mora biti komponenta hitrosti čolna v nasprotni smeri rečnega toka ($v_{\parallel}$) po velikosti ravno enaka hitrosti reke: $v_r = v_{\parallel} = v_0 \cos \varphi$. Zato je

$$\cos \varphi = \frac{v_r}{v_0} = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} = 0,5.$$

Čoln mora zato pluti pod kotom $\varphi = 60^\circ$ glede na rečni tok, da se bo gibal naravnost preko reke.

Za izračun bi seveda lahko uporabili tudi izraz 3.11 in postavili: $x = 0$. To bi nam dalo

$$(v_r - v_{\parallel}) \frac{d}{v_{\perp}} = 0.$$

Ta izraz je nič, kadar je $v_r - v_{\parallel} = 0$, kar je ravno zveza, ki smo jo dobili neposredno z razmišljanjem.

• • •

Primer 3.14

Izračunajmo še, koliko časa potrebuje čoln v prejšnjem primeru, da prečka reko:

$$T = \frac{d}{v_{\perp}} = \frac{d}{v_0 \sin \varphi} = \frac{600 \text{ m}}{4 \text{ ms}^{-1} \sin 60^\circ} = 173 \text{ s}.$$

• • •

Primer 3.15

Kaj pa, če hitrost reke naraste na $v_r = 3,5 \text{ m/s}$? Tedaj bo moral čoln pluti pod kotom 29° , ki ga izračunamo iz zveze:

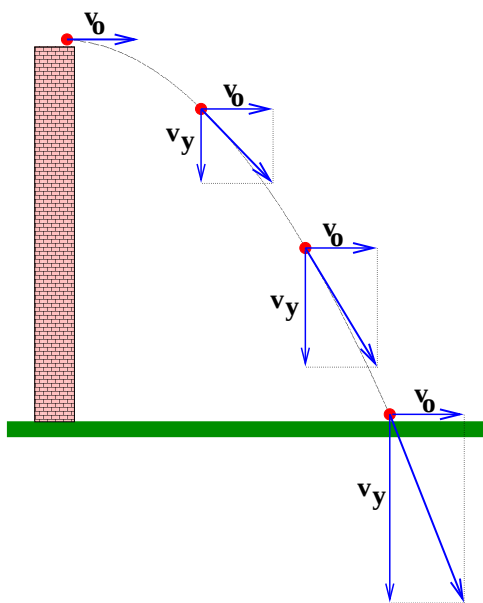
$$\cos \varphi = \frac{v_r}{v_0} = \frac{3,5 \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} = 0,875.$$

In čoln bo potreboval za pot preko reke veliko več časa:

$$T = \frac{600 \text{ m}}{4 \text{ m/s} \cdot \sin 29^\circ} = 310 \text{ s}.$$

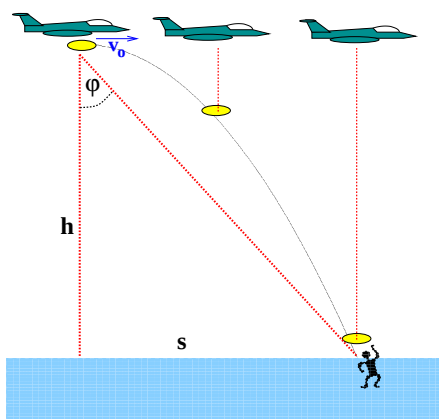
• • •

3.7.2 Vodoravni met



Slika 3.7: Pot kamna, ki smo ga vrgli v vodoravni smeri z začetno hitostjo v_0

Pogljemo, kaj se dogaja, kadar vržemo kamen vodoravno, z določeno začetno hitrostjo (v_0)? Na sliki 3.7 vidimo, da se navpična hitrost kamna s časom povečuje zaradi težnostnega pospeška, vodoravna hitrost pa se, če zanemarimo upor zraka, ne spreminja. Kamen zato prosto pada in se hkrati giblje enakomerno naprej. Čas padanja kamna je zato neodvisen od vodoravne hitrosti v_0 . Kamen je prav toliko časa (t) v zraku, kot če bi ga preprosto spustili na tla! Seveda pa ne pade k našim nogam, ker v tem času opravi pot $s = v_0 \cdot t$.



Slika 3.8: Računski primer: pilot letala spusti brodolomcu reševalno kapsulo, ko ga vidi v smeri, ki jo določa kot φ .

Primer 3.16

V višini 1200 m nad morjem leti reševalno letalo vodoravno, s hitrostjo 500 km/h, na pomoč brodolomcu v vodi. Pilot letala želi odvreči reševalno kapsulo tako, da bo ta padla v vodo čim bližje brodolomca. Kot vidimo na sliki 3.8, mora odvreči kapsulo prej, preden prileti nad brodolomca, in sicer takrat, ko ga vidi točno pod kotom φ . Izračunajmo ta kot!

Čas padanja reševalne kapsule izračunamo iz zveze $h = gt^2/2$:

$$t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 1200 \text{ m} / 9,8 \text{ ms}^{-2}} = 15,6 \text{ s}.$$

V tem času se letalo in kapsula gibljeta tudi vodoravno, z enakomerno hitrostjo $v_0 = 500 \text{ km/h}$. Pri tem opravita pot

$$s = v_0 t = v_0 \sqrt{2h/g}.$$

Kot vidimo iz slike 3.8, velja $\tan \varphi = s/h$, kar nam da

$$\tan \varphi = \frac{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}{h} = v_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

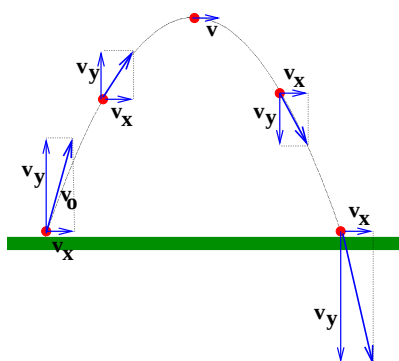
Če vstavimo podatke v to zvezo, dobimo

$$\tan \varphi = \frac{5 \cdot 10^5 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \sqrt{\frac{2}{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 1200 \text{ m}}} = 1,811,$$

iz česar izračunamo kot $\varphi = 61^\circ$.

Pilot mora zato odvreči reševalno kapsulo takrat, ko vidi brodolomca pod kotom $\varphi = 61^\circ$, to je 15,6 s preden prileti nadenj.

• • •



Slika 3.9: Pot kamna, ki smo ga vrgli z začetno hitostjo v_0 poševno navzgor pod kotom φ

3.7.3 Navpični met

Kaj pa, če vržemo kamen navpično navzgor s hitrostjo v_0 ? Tedaj kamen leti enakomerno navzgor s hitrostjo v_0 , hkrati pa prosto pada. Po času t ima hitrost $v = v_0 - gt$. Kamen se ustavi po času T , ko je ta hitrost enaka nič. Nato pa postane hitrost negativna in kamen prične padati nazaj.

V najvišji točki je torej:

$$v_0 - gT = 0,$$

iz česar dobimo čas dviganja kot:

$$T = \frac{v_0}{g}. \quad (3.12)$$

V času t opravi kamen pot navzgor (enačba 3.9):

$$s = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Največjo višino (H) pa kamen doseže v času T

$$H = v_0 \cdot T - \frac{gT^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gv_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g},$$

kar nam da

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3.13)$$

3.7.4 Poševni met

Sedaj lahko tudi že razumemo, kaj se dogaja, kadar vržemo kamen poševno navzgor pod kotom φ . Kot vidimo na sliki 3.9, lahko začetno hitrost v_0 razstavimo na navpično (v_{0y}) in vodoravno komponento (v_{0x}). Pri tem je

$$v_{0y} = v_0 \sin \varphi, \quad v_{0x} = v_0 \cos \varphi.$$

Gibanje je torej sestavljeno iz navpičnega meta navzgor, s hitrostjo v_{0y} , in enakomerne gibanja vodoravno, s hitrostjo v_{0x} .

Primer 3.17

Izračunajmo, kako daleč brizga voda, ki izteka iz cevi s hitrostjo 20 m/s, kadar je cev obrnjena poševno navzgor pod kotom 30° .

Enačba 3.12 nam pove, da del vode v curku potrebuje čas

$$T = \frac{v_{0y}}{g}$$

do najvišje točke in čas $2T$, dokler zopet ne pade na tla. V tem času pa opravi pot

$$s = v_{0x} \cdot 2T = v_{0x} \cdot 2 \frac{v_{0y}}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g}.$$

Iz tega dobimo doseg curka kot

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}. \quad (3.14)$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$.

V našem primeru je torej razdalja brizganja vode

$$s = \frac{400 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} \sin(2 \cdot 30^\circ)}{9,81 \text{ ms}^{-2}} = 35 \text{ m}.$$

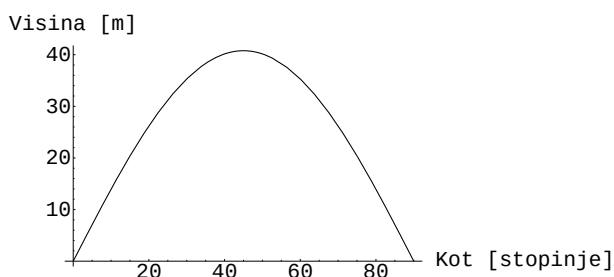
In kako visoko brizga curek?

Največjo višino dobimo preprosto s pomočjo enačbe 3.12:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{400 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = 5,1 \text{ m}.$$

Rezultat računa smo seveda zaokrožili na dve mesti, saj je tudi začetna hitrost podana le tako natančno.

• • •



Slika 3.10: Doseg v odvisnosti od kota pri poševnem metu navzgor.

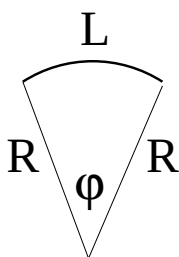
Enačba 3.14 podaja odvisnost dosega od kota φ za poševni met navzgor. To odvisnost smo narisali na sliki 3.10 za podatke iz prejšnjega primera. Kot vidimo, je doseg pri majhnem kotu majhen in nato s kotom raste. Doseg je največji pri nekem kritičnem kotu in se nato z nadaljnjim večanjem kota začne zmanjševati.

Izračunajmo, kolikšen je ta kritični kot, pri katerem je doseg največji. Pri tem kotu ima funkcija $s = v_0^2 \sin 2\varphi / g$ maksimum in je zato tangenta vodoravna. Smerni koeficient tangente ($\frac{ds}{d\varphi}$) je tedaj nič:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0. \quad (3.15)$$

To pa je mogoče le, kadar je $\cos 2\varphi = 0$. Ker pa je $\cos \pi/2 = 0$, sklepamo, da mora biti $2\varphi = \pi/2$, oziroma $\varphi = \pi/4$. Kot vidimo tudi iz slike 3.10, je doseg največji, kadar je pri poševnem metu kot $\pi/4$ oziroma 45° .

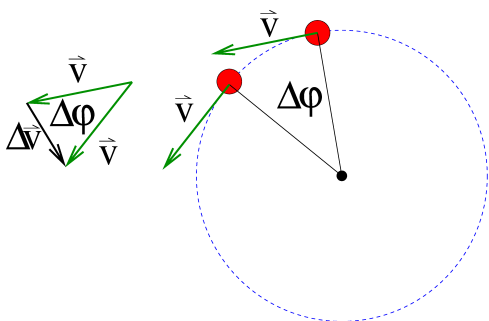
3.8 Kroženje



Slika 3.11: Kot v radianih je razmerje med dolžino loka L in polmerom kroga R : $\varphi = \frac{L}{R}$. Polni kot zato dobimo, če delimo obseg kroga s polmerom: $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$. Kot pa lahko merimo tudi v stopinjah, kjer je polni kot 360° .

Kadar je pot telesa krožnica ali njen del, pravimo, da telo kroži. Kroženje najlažje opišemo tako, da povemo, kolikšen kot (φ) opravi krožeče telo v danem času. Kot po navadi merimo v radianih (slika 3.11).

Kotno hitrost definiramo kot:



Slika 3.12: Pri kroženju je hitrost predmeta v vsaki točki tangencialna na krožnico. Zato se pri premiku za kot $\Delta\varphi$ spremeni vektor hitrosti za Δv .

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.16)$$

Spremembo kotne hitrosti pa podaja **kotni pospešek**

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.17)$$

Obhodni čas (T) je čas, ko telo pride ponovno na isto mesto. V tem času opravi kot 2π . Zato je bila v tem času povprečna kotna hitrost

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (3.18)$$

kjer smo z grško črko ν (ni) označili količino:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (3.19)$$

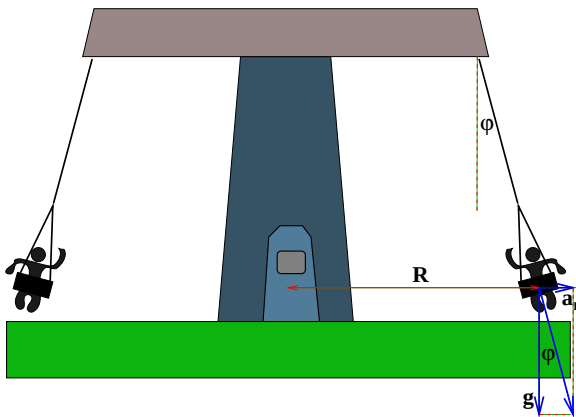
Ta količina pove, kolikokrat zakroži telo v časovni enoti. Imenujemo jo **frekvenca** kroženja.

Prav tako kot pri premem gibanju, lahko tudi pri kroženju definiramo hitrost telesa kot odvod poti po času (enačba 3.2). Tej hitrosti pravimo **obodna hitrost**. Kot vidimo na sliki 3.12, se smer obodne hitrosti med kroženjem spreminja, saj je vedno tangencialna na krožnico.

3.8.1 Enakomerno kroženje

Kadar se kotna hitrost telesa s časom ne spreminja, je tako kroženje enakomerno. V obhodnem času (T) opravi telo pot $2\pi R$, kjer je R polmer krožnice. Velikost obodne hitrosti je zato

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu = \omega R \quad (3.20)$$



Slika 3.13: Računski primer: pospešek, ki deluje na potnike na vrtiljaku, je vektorska vsota težnostnega (g) in radialnega pospeška (a_r).

in se s časom ne spreminja. Spreminja pa se smer obodne hitrosti.

Kadar telo opravi kot $\Delta\varphi$, se vektor hitrosti spremeni za Δv . Kot vidimo na sliki 3.12, je za majhne spremembe kota kar

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta v}{v},$$

saj je tedaj dolžina tetive (Δv) približno enaka dolžini loka.

Za neskončno majhne spremembe kota pa lahko zapišemo:

$$d\varphi = \frac{dv}{v}.$$

Zato je diferencial hitrosti

$$dv = v d\varphi.$$

Če poznamo spremembo hitrosti, lahko takoj izračunamo pospešek:

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{v d\varphi}{dt} = v \frac{d\varphi}{dt} = v\omega. \quad (3.21)$$

Ker se spreminja smer vektorja obodne hitrosti, tudi pri enakomernem kroženju pride do pospeška. Ta pospešek deluje v smeri vektorja Δv , torej proti središču kroga. Zato ta pospešek imenujemo **radialni pospešek**. Tega lahko zapišemo še drugače, če upoštevamo enačbo 3.20:

$$a_r = v\omega = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (3.22)$$

Primer 3.18

Za primer si oglejmo vrtiljak, kot je prikazn na sliki 3.13. Zaradi vrtenja sedeži ne vise navpično navzdol, ampak je njihova os nagnjena za kot φ . Od česa je odvisen ta kot? Ali je kaj odvisen od mase potnikov na vrtiljaku? Kolikšna je frekvenca vrtenja vrtiljaka, če je kot $\varphi = 30^\circ$ in je oddaljenost sedežev od središča vrtiljaka $R = 5 \text{ m}$?

Na potnika delujta v smeri navzdol težnostni pospešek (g) in v smeri proč od središča vrtenja radialni pospešek

$$a_r = \omega^2 R = (2\pi\nu)^2 R,$$

kjer je ν frekvenca vrtenja.

Na potnika seveda deluje vektorska vsota obeh pospeškov. Zato je kot nagiba tak, da velja

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_r}{g} = \frac{4\pi^2\nu^2 R}{g}.$$

Ta kot je odvisen predvsem od frekvence vrtenja (ν) in oddaljenosti od osi (R). Kot vidimo, nagib ni prav nič odvisen od mase potnikov.

Iz tega izračunamo frekvenco vrtenja

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R} \operatorname{tg}\varphi},$$

kar je z našimi podatki

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81 \text{ ms}^{-2}}{5 \text{ m}} \operatorname{tg}30^\circ} = 0,17 \text{ s}^{-1}.$$

Frekvenca vrtenja je torej $0,17 \text{ s}^{-1}$, oziroma $10,2 \text{ min}^{-1}$. Obhodni čas vrtiljaka pa je $T = 1/\nu = 5,9 \text{ s}$.

...

3.8.2 Enakomerno pospešeno (pojemažoje) kroženje

To je kroženje z nespreminjajočim se kotnim pospeškom. Kadar je ta pozitiven, kotna hitrost s časom narašča in je tako gibanje enakomerno pospešeno. Če pa je kotni pospešek negativen, ga imenujemo kotni pojemek. Kotna hitrost se tedaj s časom zmanjšuje in zato tako gibanje imenujemo enakomerno pojemažoje kroženje. Ker je kotni pospešek konstanten, se kotna hitrost s časom linearno spreminja:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad (3.23)$$

kjer je ω_0 začetna kotna hitrost (ν času $t = 0$).

Za kolikšen kot (φ) se premakne telo v času t pa izračunamo s pomočjo enačbe 3.16.

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \omega_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}. \quad (3.24)$$

Primer 3.19

Centrifuga, ki jo izključimo, se giblje približno enakomerno pojemajoče. Izračunajmo, kolikokrat se je med ustavljanjem zavrtela taka centrifuga, če se je v začetku vrtela s 1000 obrati v minuti in se je v dveh minutah popolnoma ustavila.

Najprej izračunajmo kotni pojemek med ustavljanjem:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = -\frac{\omega_0}{t}.$$

Z $\Delta\omega$ smo označili spremembo kotne hitrosti med ustavljanjem. To je razlika med končno in začetno kotno hitrostjo. Ker je končna kotna hitrost 0 (centrifuga se ustavi), je $\Delta\omega = -\omega_0$.

Med ustavljanjem se je centrifuga zavrtela za kot

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \frac{t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{t} \frac{t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Ker v enem vrtljaju centrifuga opravi kot 2π , je število vrtljajev (N) med ustavljanjem

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{4\pi}.$$

Z danimi podatki zato dobimo

$$N = \frac{1000 \text{ min}^{-1} \cdot 2 \text{ min}}{4\pi} = 159,2.$$

Centrifuga se bo torej med ustavljanjem zavrtela še 159-krat.

• • •

3.9 Povzetek

Premo gibanje:

pot: s

hitrost: $v = \frac{ds}{dt}$

pospešek: $a = \frac{dv}{dt}$

Enakomerno gibanje – hitrost (v) je konstantna.

pot: $s = vt$

Enakomerno pospešeno gibanje – pospešek (a) je konstanten.

pot: $s = v_0 t + a \frac{t^2}{2}$

hitrost: $v = v_0 + at$

Prosti pad – enakomerno pospešeno gibanje s pospeškom $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Sestavljeno gibanje:

Vodoravni met – met z začetno hitrostjo v_0 vodoravno z višine h

čas padanja: $t = \sqrt{2h/g}$

vodoravna pot: $s = v_0 \cdot t$

Navpični met – met navpično navzgor z začetno hitrostjo v_0

čas do vrha: $T = v_0/g$

največja višina: $H = v_0^2/2g$

Poševni met – met poševno navzgor pod kotom φ z začetno hitrostjo v_0

vodoravna pot (doseg): $s = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$

vodoravna pot je največja, kadar je kot $\varphi = \pi/4 = 45^\circ$

največja višina: $H = v_0^2 \sin^2 \varphi / 2g$

Kroženje:

kot: φ

kotna hitrost: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

kotni pospešek: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

obhodni čas: T

frekvenca: $\frac{1}{T}$

Enakomerno kroženje – kotna hitrost in obodna hitrost sta konstantni.

kotna hitrost: $\omega = 2\pi\nu$

obodna hitrost: $v = \omega R$

radialni pospešek: $a_r = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

Enakomerno pospešeno kroženje – kotni pospešek je konstanten.

kotna hitrost: $\omega = \omega_0 + \alpha t$

kot: $\varphi = \omega_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}$

3.10 Vprašanja

1. S kolesom se po dolgem klancu navzgor peljemo s hitrostjo 10 km/h. Na vrhu se takoj obrnemo in se s hitrostjo 30 km/h spustimo navzdol, do vznožja klanca. Kolikšna je celotna povprečna hitrost?
2. Tabela podaja odvisnost poti od časa za neko gibajoče se telo.

Čas [s]	Pot [m]
1	1
2	4
3	9
4	16
5	...
6	...

- a) Dopolni tabelo!
- b) Kakšno gibanje je to?
- c) Kolikšen je pospešek?

3. Kamen spustimo z višine 20 m, da prosto pade.
 - Izračunaj, s kolikšno hitrostjo pade na tla.
 - Izračunaj, koliko časa pada.
 - Nariši, kako se s časom spreminjata pot in hitrost kamna.
4. Kamen vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo 20 m/s. Izračunaj,
 - kako visoko leti kamen,
 - koliko časa je v zraku,
 - s kolikšno hitrostjo pade nazaj na tla.
5. Nogometno žogo brcnemo s tal s hitrostjo 20 m/s poševno navzgor pod kotom 60° . Izračunaj,
 - kako daleč leti žoga,
 - kolikšna je njena največja višina,
 - s kolikšno hitrostjo pade na tla.
6. Kakšna bi bila pot ladje v primeru na strani 43, če bi hitrost reke tako narastla, da bi bila enaka hitrosti ladje ($v_r = v_0 = 4 \text{ m/s}$)?
 Kaj pa, če bi postala hitrost reke večja od hitrosti ladje (na primer $v_r = 5 \text{ m/s}$)?

7. Na sliki 3.1 je prikazan Robbov vodnjak v Ljubljani. Oglej si vodnjak in za posamezne šobe oceni kot brizganja vode ter največjo razdaljo curka. Iz tega nato izračunaj hitrost iztekanja vode. Če izmeriš še premer šob, lahko izračunaš, koliko vode porabi vodnjak v eni uri.
8. Kolikšna je frekvenca vrtenja Zemlje okoli svoje osi?
9. Kolikšna je naša kotna hitrost zaradi vrtenja Zemlje okoli svoje osi?
10. Kolikšna je obodna hitrost prebivalcev krajev ob ekvatorju zaradi vrtenja Zemlje okoli svoje osi? Upoštevaj, da je polmer Zemlje 6378 km. Kolikšen je tu radialni pospešek?
11. Kolikšna sta pri nas obodna hitrost in radialni pospešek zaradi vrtenja Zemlje okoli svoje osi? Zemljepisna širina Ljubljane je $46,05^\circ$.
12. Oцени, kolikšna je obodna hitrost Zemlje zaradi kroženja okoli Sonca? Upoštevaj, da je povprečna razdalja med Zemljo in Soncem $1,5 \times 10^8$ km.
13. Nariši, kako se spreminjata kot zasuka in kotna hitrost centrifuge v primeru na strani 53. Izračunaj, kolikšna je bila povprečna kotna hitrost te centrifuge med ustavljanjem.
14. Hitrost nekega predmeta se s časom spreminja kot: $v = v_0 \sin \omega t$.
 - Napiši in nariši, kako se spreminja pospešek tega telesa.
 - Nariši, kako se s časom spreminja njegova pot.
 - Kako imenujemo tako gibanje?

4

STATIKA

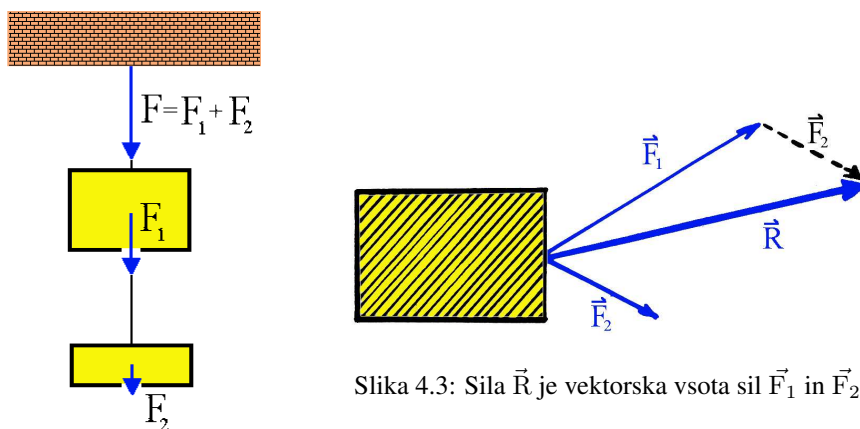


Slika 4.1: Pri testiranju je navor terapevtkine roke odvisen od sile in prijemališča roke.

4.1 Sila

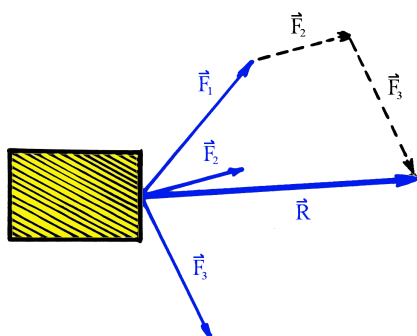
Iz izkušenj vemo, da se lahko telesu spremeni smer ali hitrost gibanja samo tako, da nanj deluje neko drugo telo. Tudi za spremembo oblike telesa potrebujemo delovanje nekega drugega telesa. Pravimo, da eno telo deluje na drugo s silo. Sila je torej količina, ki telesu spremeni hitrost gibanja ali pa ga deformira. Za opis sile je poleg njene velikosti pomembna tudi smer delovanja. Pravimo, da je sila vektor, kar označimo s puščico nad znakom (npr. $\vec{F}$). Oznaka brez vektorskega znaka (puščice), npr. F , pa pomeni le velikost sile. Silo narišemo kot puščico, katere dolžina je sorazmerna velikosti sile. Kadar več sil deluje v isti smeri, lahko velikosti sil enostavno seštejemo. Tako na primer na sliki 4.2 teži obeh uteži ($\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$) delujeta navzdol, zato je celotna sila na obesišče kar vsota velikosti obeh sil.

Kadar pa se smeri sil, ki delujejo v isti točki, med seboj razlikujejo, moramo sile vektorsko sešteti. Na sliki 4.3 na predmet delujeta dve sili: $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$. Skupna sila na predmet je vektorska vsota (rezultanta) obeh sil: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Na sliki 4.3 vidimo, da je velikost rezultante (R) manjša od vsote velikosti obeh sil ($F_1 + F_2$). Rezultanto dveh sil najlažje določimo grafično, in sicer tako, da silo $\vec{F}_2$ vzporedno prenesemo na konec sile $\vec{F}_1$ in narišemo rezultanto iz prijemališča sil do konca $\vec{F}_2$. Tako metodo določanja rezultante sil lahko uporabimo tudi, kadar na telo hkrati deluje več sil (glej sliko 4.4).

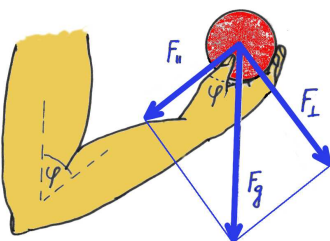


Slika 4.3: Sila $\vec{R}$ je vektorska vsota sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$.

Slika 4.2: Sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ imata enako smer, zato je velikost njune vsote kar enaka vsoti velikosti $F_1 + F_2$.



Slika 4.4: Primer grafičnega določanja vsote več sil. Sila $\vec{R}$ je vektorska vsota $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.



Slika 4.5: Težo bremena (F_g) smo razstavili na dve med seboj pravokotni komponenti: $\vec{F}_{\parallel}$ deluje v smeri proti osi vrtenja, $\vec{F}_{\perp}$ pa je nanjo pravokotna.

Včasih se zgodi, da poznamo rezultanto in želimo določiti velikosti sil v dveh izbranih smereh, tj. želimo rezultanto razstaviti na dve komponenti. Ta postopek je ravno obraten seštevanju sil. Oglejmo si primer, ki ga prikazuje slika 4.5. Sila teže bremena ($\vec{F}_g$), ki ga držimo v roki, deluje navpično navzdol. To silo smo razstavili na dve komponenti: silo v smeri proti osi vrtenja v komolčnem sklepu ($\vec{F}_{\parallel}$) in nanjo pravokotno silo ($\vec{F}_{\perp}$). Sila $\vec{F}_{\parallel}$ pritiska na komolčni sklep, pravokotna sila $\vec{F}_{\perp}$ pa poskuša zavrteti podlaket navzdol. Velikosti teh dveh sil sta odvisni od sile teže bremena in kota φ .

$$F_{\parallel} = F_g \cos \varphi, \quad F_{\perp} = F_g \sin \varphi. \quad (4.1)$$

4.2 Navor

Kot smo videli na primeru (slika 4.5), lahko vsako silo na segment telesa razstavimo na pravokotno komponento ($\vec{F}_{\perp}$), ki povzroča vrtenje, in vzporedno komponento ($\vec{F}_{\parallel}$), ki deluje v smeri proti osi vrtenja in le pritiska na os. Iz izkušnje vemo, da se bo segment hitreje zavrtel, čim večja bo pravokotna komponenta sile in čim bolj bo

ta oddaljena od osi vrtenja. Oddaljenost prijemališča sile od osi vrtenja imenujemo ročica, količina, ki je pomembna za vrtenje, pa je navor. Velikost navora (M) je produkt pravokotne sile in njene ročice (r):

$$M = rF_{\perp}, \quad (4.2)$$

kar lahko zapišemo tudi drugače:

$$M = rF \sin \varphi, \quad (4.3)$$

kjer je φ kot med ročico in silo.

Navor je vedno določen glede na izbrano os vrtenja. Kadar je navor enak nič, se mirujoče telo okoli te osi ne bo zavrtelo. Kadar na telo deluje več sil, a nas zanima vrtenje le okoli ene same osi, lahko velikosti navorov kar preprosto seštevamo. Pri tem moramo paziti le na to, da navorom, ki poskušajo povzročiti vrtenje v obratno smer, pripišemo tudi obraten predznak. Kadar je vsota navorov okoli dane osi enaka nič, se mirujoče telo okoli te osi ne zavrti.

Oglejmo si sedaj bolj splošno definicijo navora. Matematično je navor vektorski produkt sile in njene ročice. Ročica je v resnici vektor ($\vec{r}$), čigar velikost je enaka oddaljenosti prijemališča sile ($\vec{F}$) od osi vrtenja in ima smer od osi proti sili. Navor ($\vec{M}$) je vektor, ki ga dobimo z vektorskim množenjem ročice in sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Z znakom $\times$ smo označili vektorski produkt. Rezultat takega vektorskega množenja je vektor, katerega velikost podaja enačba 4.3. Kot φ je najmanjši kot med ročico in silo. Po dogovoru je navor vektor, ki je hkrati pravokoten na $\vec{r}$ in $\vec{F}$ ter določa os vrtenja. Kaže v smer, kamor bi se premaknil desni vijak pri najkrajšem možnem zasuku vektorja $\vec{r}$ v smer sile $\vec{F}$.

4.3 Navor ali moment?

V praksi bomo lahko večkrat srečali besedo **moment** namesto **navor**. Strogo vzeto je moment produkt ročice na določeno potenco s katerokoli količino. Tako na primer vztrajnostni moment pri vrtenju telesa (stran 110) izračunamo kot kvadrat ročice pomnožen z maso in zato pravimo, da je to drugi moment mase. Podobno je tudi ploskovni vztrajnostni moment pri upogibu elastične palice (stran 90) drugi moment površine preseka palice, saj ga izračunamo tako, da pomnožimo kvadrat ročice s presekom.

Glede na vse to vidimo, da je navor prvi moment sile saj ga izračunamo tako, da ročico (na prvo potenco) pomnožimo s silo. Vendar pa ljudje to pogosto okrajšajo in navor imenujejo samo moment sile ali še krajše samo moment. Na področjih, ki se ukvarjajo pred-

vsem z navori in ne z drugačnimi momenti, pripomogla tudi nekdanja nemška tehnična literatura, ki za navor uporablja besedo vrtilni moment (Drehmoment).

je taka okrajšava pogosta in tam ljudje pogosto govorijo o momentih, ko imajo v mislih navore. K temu je najbrž v precejšnji meri

4.4 Statika – telesa v mirovanju

Statika proučuje mirujoča telesa. Pogoj za mirovanje je, da sta vsoti vseh sil ($\vec{F}_i$) in vseh navorov ($\vec{M}_i$), ki delujejo na telo, enaki nič.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (4.4)$$

Oglejmo si preprost primer: dva otroka z masama m_A in m_B na gugalnici (slika 4.6). Napišimo pogoj za ravnovesje sil.

$$F_A + F_B + F_R = 0,$$

kjer sta $F_A = m_A \cdot g$ in $F_B = m_B \cdot g$ teži obeh otrok (g je težnostni pospešek), F_R pa je reakcijska sila, s katero os podpira gugalnico. Ta je ravno nasprotno enaka vsoti obeh tež

$$F_R = -(F_A + F_B).$$

Pogoj za ravnovesje novorov lahko zapišemo glede na katerokoli os. Zaradi enostavnosti bomo izbrali kar os, okoli katere se gugalnica vrti. Dobimo

$$F_A \cdot a - F_B \cdot b = 0.$$

Od tod sledi

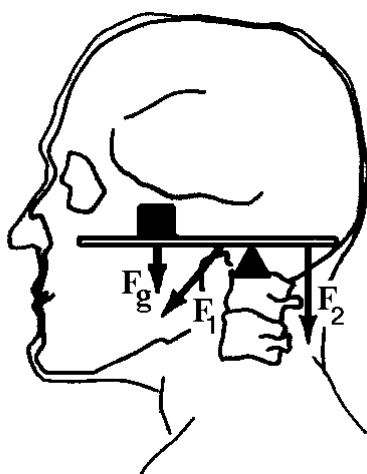
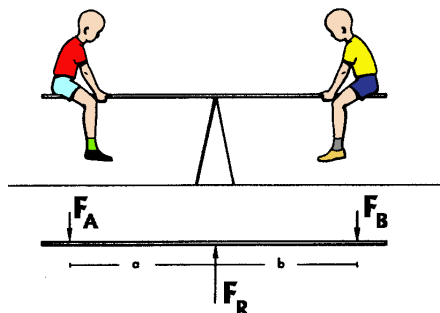
$$\frac{a}{b} = \frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B}{m_A}. \quad (4.5)$$

4.5 Vzvodi

Gugalnica na sliki 4.6 je preprost primer vzvoda, saj ena sila (npr. F_A) drži v ravnovesju breme (npr. F_B). Tak vzvod imenujemo dvokraki vzvod ali vzvod prvega tipa. Primer takega vzvoda v človeškem organizmu je prikazan na sliki 4.7.

Ločimo tri tipe vzvodov, ki so shematsko prikazani na sliki 4.8. Vzvoda drugega in tretjega tipa se med seboj razlikujeta po relativni dolžini ročice sile in bremena. Ker je ročica bremena pri vzvodu drugega tipa krajša od ročice sile, je ta vzvod primeren predvsem za premagovanje velikih sil. Vzvod tretjega tipa pa je zelo pogost v človeškem telesu – pojavlja se predvsem tam, kjer so potrebne velike hitrosti gibanja. Primer vzvoda tretjega tipa je prikazan na sliki 4.9.

Slika 4.6: Dva otroka z različnima masama sedita na gugalnici. Gugalnica miruje (je v ravnovesju), kadar je razmerje oddaljenosti otrok od osi vrtenja obratno sorazmerno razmerju njunih mas.



Slika 4.7: Dvokraki vzvod (1. tip) za natančno pozicioniranje glave. Vrtilišče je cervikalna hrbtenica. F_g je teža glave, F_1 in F_2 pa sta sili mišic za uravnavanje lege glave.

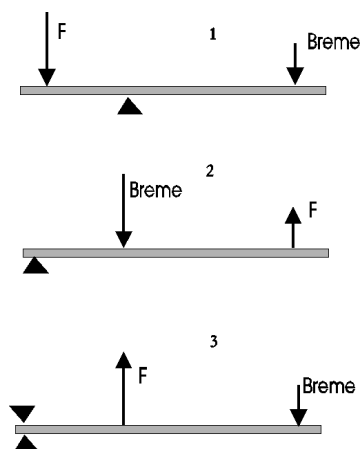
4.6 Statika človeškega telesa

Zelo pomembno je poznati sile, ki delujejo v človeškem telesu. Glede na to, kako natančen odgovor želimo, vpeljemo določene poenostavitve. Obravnavamo le del telesa, ki nas zanima, skupine mišic predstavimo z eno samo silo, zanemarimo mišice, katerih sila je majhna, itn.

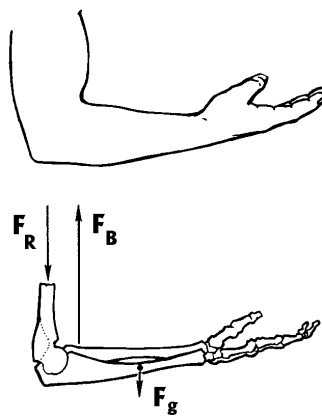
4.6.1 Sile na hrbtenico pri predklonu

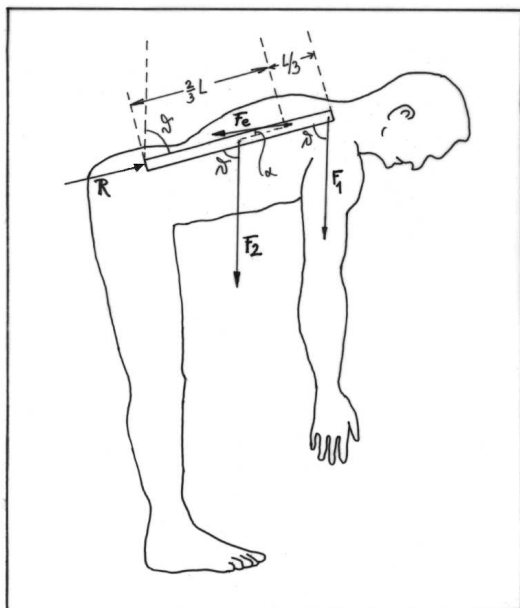
Kot primer si oglejmo, kakšna sila (R) deluje na peto ledveno vretence, kadar je zgornji del telesa nagnjen naprej, kot na primer pri dviganju predmetov s tal. Položaj telesa je shematsko prikazan na sliki 4.10. Hrbtenico bomo obravnavali kot

Slika 4.8: Shematski prikaz treh tipov vzvodov. Vzvod prvega tipa je dvokraki, vzvoda drugega in tretjega tipa pa sta enokraki. Pri drugem tipu je ročica sile daljša od ročice bremena, pri tretjem tipu pa je ravno obratno. Zaradi preglednosti sile na os vrtenja niso prikazane.



Slika 4.9: Enokraki vzvod tretjega tipa je najbolj pogost v našem telesu. Omogoča velike hitrosti na račun večjih sil. Vrtišče na sliki je komolčni sklep. Sila bicepsa (F_B) povzroča navor, ki je nasprotno enak navoru skupne teže roke in podlakti (F_g).





Slika 4.10: Shematski prikaz sil na peto ledveno vretence pri predklonu

togo telo, ki je vrtljivo podprto na meji med ledvenim in križnim delom. Meritve so pokazale, da lahko delovanje hrbtnega mišičja popišemo z eno samo silo (F_e), ki prijemlje približno na dveh tretjinah razdalje do težišča glave in rok ($L_e = 2L/3$). Kot (α) med to silo (F_e) in hrbtenico je okoli 12° . F_2 je teža trupa, ki prijemlje praktično na sredini hrbtenice ($L_2 = L/2$), F_1 pa je skupna teža glave in zgornjih udov s prijemališčem na zgornjem koncu hrbtenice ($L_1 = L$). Iz tabele 5.1 ali slike 5.10 na strani 82 ugotovimo, da je približno

$$F_2 = 0,4F_t,$$

$$F_1 = 0,2F_t,$$

kjer je F_t celotna telesna teža.

Zapišimo oba pogoja za ravnovesje, kadar je kot med osjo hrbtenice in navpičnico ϑ . Ravnovesje navorov okoli petega ledvenega vretenca nam da

$$F_e L_e \sin \alpha - F_2 L_2 \sin \vartheta - F_1 L_1 \sin \vartheta = 0. \quad (4.6)$$

Silo F_e dobimo iz tega pogoja kot

$$F_e = \frac{F_2 L_2 + F_1 L_1}{L_e \sin \alpha} \sin \vartheta. \quad (4.7)$$

Če pa upoštevamo še približke za lege in velikosti sil, dobimo:

$$F_e = 2,9F_t \sin \vartheta. \quad (4.8)$$

Vidimo, da je lahko sila mišic, ki je potrebna, da telo obdržimo v predklonjenem položaju, celo veliko večja od celotne teže telesa. Če se na primer nagnemo naprej za kot 60° , bo sila mišic kar $2,5F_t$.

Silo R razdelimo na vodoravno (R_x) in navpično (R_y) komponento. Pogoji za ravnovesje komponent sil v vodoravni smeri se glasi

$$R_x - F_e \sin(\alpha + \vartheta) = 0, \quad (4.9)$$

saj je kot med navpičnico in smerjo sile mišic $\alpha + \vartheta$.

Če uporabimo še enačbo 4.8, dobimo:

$$R_x = 2,9F_t \sin \vartheta \sin(12^\circ + \vartheta). \quad (4.10)$$

Kadar se nagnemo za kot 60° , je torej $R_x = 2,4F_t$.

Sili F_1 in F_2 sta navpični in zato nastopata le v pogoju za ravnovesje navpičnih komponent sil. Tega zapišemo kot

$$R_y - F_e \cos(\alpha + \vartheta) - F_2 - F_1 = 0, \quad (4.11)$$

kar nam da z upoštevanjem približka za velikost sil

$$R_y = (0,6 + 2,9 \sin \vartheta \cos(\alpha + \vartheta))F_t. \quad (4.12)$$

Za primer $\vartheta = 60^\circ$ dobimo tako $R_y = 1,4F_t$. Celotno silo R pa izračunamo po Pitagorovem izreku kot

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (4.13)$$

Za šestdesetstopinjsko fleksijo nam da ta enačba silo na spodnji del hrbtenice, ki je skoraj trikrat večja od celotne telesne teže ($R = 2,7F_t$)! Zato ni presenetljivo, da ima toliko ljudi bolečine v križu.

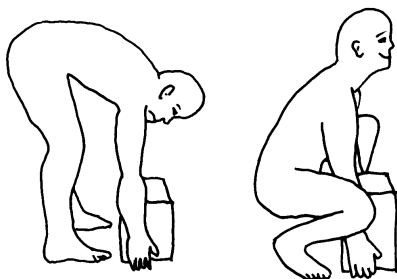
4.6.2 Dviganje bremen

Metodo, opisano v prejšnjem poglavju, lahko uporabimo tudi za izračun sil, ki pri dviganju bremen delujejo na ledveni del hrbtenice. Če s predklonom dvignemo breme, kot je to prikazano na levi sliki 4.11, je sila F_1 vsota teže bremena (F_B) ter teže glave in zgornjih udov. Zato je

$$F_1 = 0,2F_t + F_B.$$

Tako dobimo namesto enačbe 4.8 zvezo

$$F_e = (2,9 + 7,2 \frac{F_B}{F_t})F_t \sin \vartheta. \quad (4.14)$$



Slika 4.11: Poškodbe v križu lahko zmanjšamo s primernim načinom dviganja bremen. Breme naj bo čim bližje križu, glava dvignjena in hrbtenica pokončna, da bo ročica sile teže čim manjša (desna slika). Leva slika prikazuje nepravilen način dviganja bremen, pri katerem velika ročica sile teže bremena povzroči veliko obremenitev hrbtenice.

Kot primer izračunajmo, kolikšna je ta sila hrbtenega mišičja, kadar držimo v rokah breme, težko eno petino telesne teže ($F_B = 0,2F_t$). Pri kotu fleksije $\vartheta = 60^\circ$ je tedaj $F_e = 3,7F_t$. S pomočjo enačb 4.9 in 4.11 lahko za ta primer izračunamo

$$R_x = 3,6F_t,$$

$$R_y = 2,0F_t,$$

iz česar dobimo vrednost sile na spodnji del hrbtenice kot $R = 4,1F_t$.

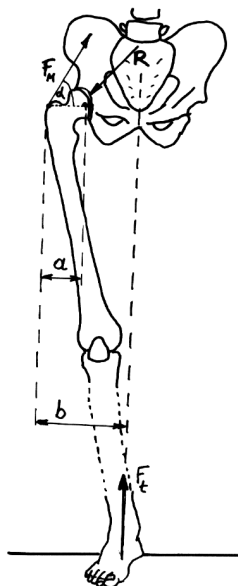
Če na primer človek z maso 60 kg drži breme mase 12 kg v predklonu pod kotom 60° , je sila, ki pritiska na vretenca, približno 2460 N, kar je sila teže 246-kilogramskega bremena. Ta sila je tako velika zato, ker je ročica sile F_1 zelo velika. V prejšnjem poglavju smo videli, da bi bila brez bremena ta sila le $2,9F_t$, kar je v tem primeru 1680 N. Dvig bremena z maso 12 kg zato poveča silo na hrbtenico za 780 N ($1,3F_t$), tj. silo, ki ustreza masi 78 kg.

Če želimo hrbtenico obvarovati velikih obremenitev, se moramo izogibati dvigovanju bremen na način, pri katerem je ročica teže bremena velika (slika 4.11 levo). Ročico sile F_1 lahko zmanjšamo tako, da dvigamo bremena čim bližje svojemu telesu (slika 4.11 desno).

4.6.3 Sila na glavo stegenice pri enonožni stoji

Ogledali si bomo poenostavljen izračun sil, ki delujejo na glavo stegenice pri enonožni stoji (slika 4.12). Ker je telo v ravnovesju, mora biti težišče telesa nad stopalom. Nanj zato deluje reakcijska sila podlage (F_t), ki je enaka celotni teži telesa. Medenico držijo v vodoravnem položaju abduktorske mišice (glutaeus medius, glutaeus minimus in tensor fascia latae). Ugotovili so, da lahko njihovo delovanje opišemo z učinkovito abduktorsko silo (F_M), ki prijemlje na veliki grči (trochanter maior) stegenice in tvori kot $\alpha = 70^\circ$ z vodoravno ravnino. Če privzamemo, da je velika grča oddaljena približno $a = 7$ cm od središča glave stegenice in $b = 18$ cm od središčne osi telesa, lahko ocenimo velikost sile mišic (F_M) ter velikost in smer sile, ki pritiska na glavo stegenice (R).

Slika 4.12: Kadar stojimo na eni nogi, deluje na glavo stegenice velika sila. Tudi to je vzvod prvega tipa, kjer na eni strani deluje sila abduktorskih mišic (F_M), na drugi pa reakcijska sila podlage (F_t), ki je enaka celotni telesni teži.



Telo miruje, kadar je vsota vseh navorov enaka nič. Navor sile podlage glede na os vrtenja v kolčnem sklepu $F_t(b-a)$ je zato nasprotno enak navoru sile mišic: $aF_M \sin \alpha$. Zato je

$$F_M = \frac{b-a}{a \sin \alpha} F_t. \quad (4.15)$$

S privzetimi podatki tako dobimo $F_M = 1,7F_t$.

Napišimo še pogoja za ravnovesje sil. Silo na glavo stegenice razstavimo na vodoravno (R_x) in navpično (R_y) komponento. Dobimo:

$$-R_x + F_M \cos \alpha = 0, \quad -R_y + F_M \sin \alpha + F_t = 0 \quad (4.16)$$

Če uporabimo še enačbo 4.15, lahko zapišemo:

$$R_x = \frac{b-a}{a \tan \alpha} F_t, \quad R_y = \left(1 + \frac{b-a}{a}\right) F_t. \quad (4.17)$$

Z našimi podatki dobimo iz teh dveh enačb $R_x = 0,6F_t$ in $R_y = 2,6F_t$.

Velikost sile na glavo stegenice izračunamo s Pitagorovim izrekom

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (4.18)$$

kar nam da $R = 2,6F_t$. Izračunajmo še smer sile R . Če s φ označimo kot med to silo in navpičnico, velja

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_x}{R_y}. \quad (4.19)$$

Iz tega lahko izračunamo, da je pri danih podatkih kot $\varphi = 13^\circ$.

Pri enonožni stoji je torej za stabilizacijo medenice potrebna sila mišic, ki je približno enaka poldrugi telesni teži ($F_M = 1,7F_t$), glavo stegenice pa pritiska ob kolčnico približno dvainpolkratna sila telesne teže.



Slika 4.13: Nepalski način nošnje bremen na hrbtu s trakom preko čela

4.7 Nošnja bremen

Nošnja bremen je ena najosnovnejših človekovih aktivnosti. Nekdaj je bil to edini način transporta hrane in drugih življenjskih potrebščin. Poljske pridelke, meso ulovljenih živali in les za kurjavo so naši predniki z lastnimi močmi znosili v svoja bivališča. In za večino ljudi na svetu je nošnja še vedno najpomembnejši način transporta. Marsikje

si zaradi revščine ljudje ne morejo privoščiti tovornih živali ali celo mehaniziranega prevoza dobrin. V goratih predelih Zemlje pa večinoma tako ali tako ni cest in celo steze pogosto niso primerne za tovarne živali.

Čeprav je razvoj tehnike v naši kulturi zmanjšal potrebo po nošnji bremen, je ni mogel povsem odpraviti. Še vedno moramo vso hrano sami znositi v svoja stanovanja, pa čeprav samo od garaže do kuhinje. In vse naše

Tabela 4.1: Nošnja bremen glede na namen

vsakdanje življenje	prinašanje potrebščin v bivališča (nakupovanje) nošnja otrok
poklic	pot v šolo, službo pismonoše vojaki
rekreacija	pohodništvo gornišstvo (alpinizem)

Tabela 4.2: Načini nošnje, glede na to, kje je breme

glava	tovor na glavi, čelada
rame	jarem, drog, tovor na rami
hrbet	nahrbtnik, koš, krošnja
prsi	nahrbtnik spredaj
trup	torba ob trupu, tovor je porazdeljen po telesu (npr. v žepih)
boki	pas, torbice na pasu
zgornje okončine	držec preko prsi, v višini bokov
roke	eno- ali dvoročno na strani
spodnje okončine	žepi
noge	čevlji

imetje je bilo treba tako ali drugače prinesiti v naša bivališča. Prav tako starši še vedno nosijo otroke. Otroci se vsakodnevno šibijo pod težo šolskih pripomočkov na poti v šolo, marsikdo nosi v službo in domov knjige in spise, pismonoše nosijo pošto v torbah, obrtniki pa nas po navadi obiščejo s škatlo z orodjem. Posebno obremenjeni so vojaki, ki kljub sodobni tehniki prenašajo težke nahrbtnike, orožje in dodatno opremo.

V naši kulturi se je z višjim standardom in vse krajšim delovnikom pojavila rekreacija kot način preživljanja prostega časa. To je lahko pohodništvo, planinstvo ali razne

oblike gornišstva, od preprostih vzponov na vrhove, preko alpinizma in turnega smučanja do večdnevniških odprav v visokogorje. Pri vsej tej dejavnosti navadno nosimo s seboj kar nekaj opreme, poleg hrane in rezervne obleke lahko tudi opremo za prenočevanje ter razne tehnične pripomočke. Vse to navadno prenašamo na hrbtu, v nahrbtniku.

Razdelitev nošnje glede na namen nam prikazuje tabela 4.1.



Slika 4.14: Laboratorijska meritev dveh različnih načinov nošnje bremena: v nahrbtniku in okoli trupa. (Biomehanski laboratorij Zdravstvene fakultete)

4.7.1 Načini nošnje bremen

Poskusimo sedaj ugotoviti, kakšni so najpogostejši načini nošnje bremen. Glede na to, kje nosimo breme, lahko spoznamo več načinov, ki so podani v tabeli 4.2. Kateri način izberemo, je odvisno od teže in oblike bremena, od tega, kako daleč moramo breme nesti, od naše fizične sposobnosti in preteklih izkušenj. Zelo pomembna je tradicija. Afriške ženske nosijo bremena na glavi, nepalski nosači na hrbtu s pomočjo čelnega

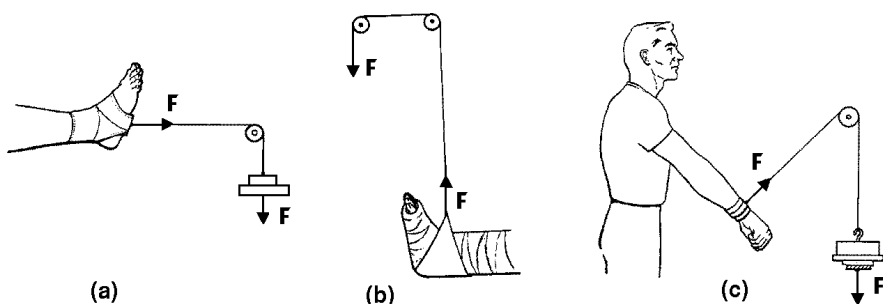
traku, evropski turisti imajo najraje nahrbtnike, nakupljeno blago pa po navadi prenašamo ob telesu v eni roki v polivinilni vrečki. Meritve so pokazale, da lahko afriške ženske nosijo na glavi do 50 kg bremena, nepalski nosači do 80 kg, sodobnega vojaka pa pogosto obremenijo do 40 % telesne teže, čeprav priporočajo obremenitve le do 1/3 telesne teže.

Za stabilnost naj bo breme čim bližje telesu.

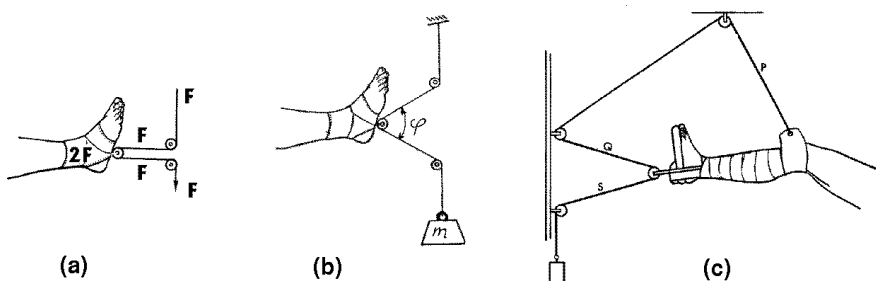
4.8 Škripci

Pogosto je ugodno spremeniti smer sile, ne da bi vplivali na njeno velikost. Tedaj poskrbimo, da sila deluje preko vrvice, ki smo jo napeljali okoli kolesčka z zelo majhnim trenjem. Tako napravo imenujemo škripec. Najpreprostejša oblika škripca je prikazana na sliki 4.15. V vseh teh primerih smo silo teže uteži, ki vedno deluje navzdol, preko škripca le preusmerili. Velikost sile se pri tem ni spremenila.

S škripci pa lahko spremenimo tudi velikost sile. Oglejmo si sliko 4.16. Teža uteži (F) deluje na sliki 4.16(a) navzdol. Ta sila se preko škripcev prenese na nogo in od tam na pritrdišče na stropu. Povsod vrvico napenja enaka sila (F). Sistem miruje, zato je vsota sil enaka nič. Na nogo delujeta dve vrvici, vsaka s svojo



Slika 4.15: Preprost škripec le spremeni smer sile.



Slika 4.16: Sestavljeni škripci

silo, ki sta enaki. Zato je rezultanta, ki deluje na stopalo, enaka dvakratni sili ($2F$). Podoben je tudi primer na sliki 4.16(b). Vendar tu dela vrvice, ki potekata do srednjega koleščka, nista vzporedna. Na ta kolešček deluje zato rezultanta sil obeh vrvic, ki jo dobimo z vektorskim seštevanjem obeh sil. Ta je manjša od dvakratne sile teže uteži.

Slika 4.16(c) pa prikazuje Rusellovo trakcijo za imobilizacijo zlomov stegnenice. Na stopalo deluje rezultanta (R) sil obeh vrvic (S in Q), ki sta po velikosti enaki teži uteži. Ta rezultanta preko goleni deluje na koleno. Na tem mestu pa je pritrjen konec vrvice, ki vleče koleno s silo P , ki je seveda po velikosti enaka teži uteži. Sila na stegnenico je zato vektorska vsota sile P in rezultante R . Zato je ta sila kar enaka vektorski vsoti sil S , Q in P , ki so vse tri po velikosti enake, razlikujejo se le po smeri.

4.9 Povzetek

- Sila je vektor.
- Razstavljanje sile (F_g) na dve pravokotni komponenti:

$$F_{\parallel} = F_g \cos \varphi, \quad F_{\perp} = F_g \sin \varphi.$$

- Velikost navora (M) je produkt pravokotne sile in njene ročice:

$$M = rF \sin \varphi.$$

- Pogoji za mirovanje telesa: vektorska vsota vseh sil in vseh navorov mora biti nič.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0.$$

- Ločimo tri tipe vzvodov.
- Preprost škripec spremeni samo smer sile.

4.10 Vprašanja

1. Izmeri dolžino svoje nadlakti, podlakti in roke ter rezultate primerjaj s sliko 1.3.
2. Z primer, ki je prikazan na sliki 4.5, nariši graf odvisnosti pravokotne in vzporedne komponente sile bremena od kota ϕ .
3. Oceni podatke za svojo roko in izračunaj navor desetikilogramskega bremena okoli komolčnega sklepa na sliki 4.5, če je kot $\phi = 90^\circ$.
4. Kolikšna mora biti sila bicepsa, da bo roka v prejšnjem primeru mirovala. Ročico bicepsa oceni pri sebi. (Navor bicepsa mora biti nasprotno enak navoru sile bremena.)
5. Pri izračunu v prejšnjem primeru upoštevaj še težo podlakti in roke (glej tudi sliko 4.9).
6. Na sliki 4.8 nariši za vse tri tipe vzvodov sile na os vrtenja. Uporabi pogoj za ravnotežje sil in navorov (enačba 4.4) ter določi, kolikšna je njihova velikost in v katero smer delujejo.
7. Izračunaj, kje moramo podpreti 3 m dolgo desko, da bosta na njenih koncih lahko sedela v ravnotežju dva otroka z masama 20 kg in 30 kg (glej sliko 4.6).
8. Naštej nekaj primerov vzvodov tretjega tipa v človeškem telesu.
9. Ugotovi, kakšne vrste vzvod tvori teža glave in zgornjih udov (F_1) pri položaju telesa, kot je prikazan na sliki 4.10.
10. Kolikšna sila deluje na spodnji del hrbtenice v vzravnanem položaju ($\theta = 0^\circ$)?
11. Izračunaj, kolikšna sila deluje na spodnji del hrbtenice človeka z maso 80 kg, kadar je toliko nagnjen naprej, da je njegov trup v vodoravnem položaju ($\theta = 90^\circ$).
12. Kolikšna pa je sila v prejšnjem primeru, če ta človek poskuša dvigniti predmet z maso 10 kg?



Slika 4.17: Varilec pri sestavljanju železne peči.

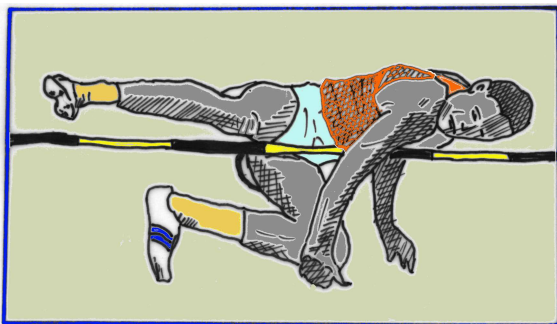
13. Ali je prikazan način dviganja bremena pravilen? Zakaj?



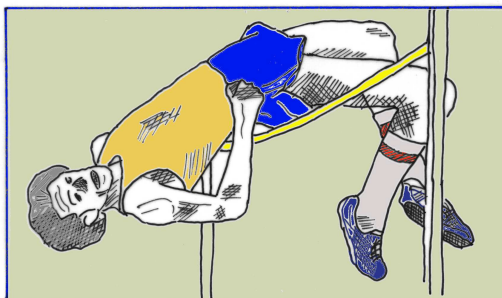
14. Komentiraj sliko 4.17!
15. Pojasni, zakaj trdimo, da sili F_M in F_t na sliki 4.12 tvorita vzvod prvega tipa.
16. Kolikšna sila deluje na glavo stegenice, kadar stojimo na obeh nogah?
17. Kako se spremeni sila na glavo stegenice pri enonožni stoji, če v roki držimo breme?
18. V vseh treh primerih, prikazanih na sliki 4.16, nariši rezultanto sil na nogo.
19. Kolikšna je sila na nogo na srednji sliki 4.16, če je kot $\varphi = 60^\circ$?

5

TEŽIŠČE



Slika 5.1: Pri skoku v višino športniki uporabljajo različne tehnike, da bi njihovo težišče ostalo čim nižje.





Slika 5.2: (A) Če je podlaga podprta le v osi O, vsota vseh navorov ni enaka nič in pričakujemo, da se bo telo zavrtelo okoli te osi. Telo pa miruje, kadar je podprto pod težiščem, ker je tedaj vsota vseh navorov enaka nič. (B)

5.1 Teža

Vsa telesa so narejena iz snovi. Količino te snovi imenujemo masa in jo merimo npr. v kilogramih (kg). Zemlja na snov deluje s privlačno silo, ki jo imenujemo teža. Ta sila je vedno usmerjena proti središču Zemlje, njena velikost pa je sorazmerna masi:

$$F_g = m \cdot g,$$

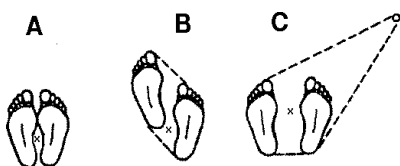
kjer je m masa telesa in g težnostni pospešek. Velikost težnostnega pospeška se od kraja do kraja na Zemlji rahlo spreminja in je v Ljubljani pribl. $9,81 \text{ m/s}^2$. Pogosto pa pri bolj približnem računanju zaradi enostavnosti privzamemo kar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

5.2 Težišče

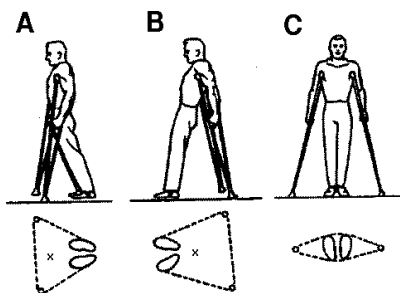
Oglejmo si sliko 5.2! Človek leži na ravni, enakomerno debeli podlagi, ki je podprta tako, da se lahko vrti okoli osi O. Vsoto vseh navorov glede na to os lahko izračunamo. Telo si mislimo sestavljeno iz majhnih kock z maso m_i , oddaljenih r_i od osi O. Vsak tak delček telesa povzroča navor z velikostjo $M_i = r_i \cdot m_i \cdot g$. V primeru, prikazanem na sliki 5.2 A, pričakujemo, da vsota vseh navorov ne bo nič. Telo zato ne bo mirovalo, ampak se bo zavrtelo okoli osi O. Za vsako telo pa obstajajo tudi take osi, glede na katere bi bila vsota vseh navorov enaka nič (slika 5.2 B). Videti je, kakor da bi bila vsa masa telesa zbrana v eni sami točki nekje nad tako osjo. To točko imenujemo težišče ali masno središče telesa. Pri obravnavi statike togih teles lahko zato privzamemo, da sila teže prijemlje v težišču telesa.

5.3 Stabilnost

Vsota vseh navorov je nič, kadar je telo podprto v točki pod težiščem. Tedaj telo miruje. Kaj pa se zgodi, če lego težišča premaknemo? Kadar je lega telesa taka, da se po majhnem premiku težišča samo vrne v prvotno lego, pravimo, da je taka



Slika 5.3: Velikost podporne ploskve lahko povečamo z razmikom nog (B) ali z uporabo palice (C).



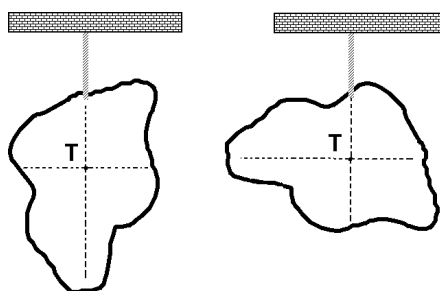
Slika 5.4: Uporaba bergele poveča stabilnost. × označuje lego projekcije težišča na podporni ploskvi.

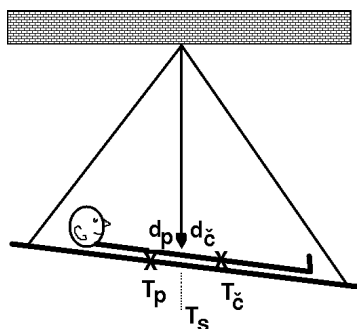
lega stabilna. V biomehaniki pogosto govorimo o bolj in manj stabilnih legah, pač glede na to, kako velik premik težišča je potreben, da telo prevrnemo.

Stabilnost telesa je tako odvisna od podporne ploskve. Stoječe človeško telo je najmanj stabilno, kadar sta nogi vzporedni in skupaj (slika 5.3 A). Ko razširi noge in s tem poveča podporno ploskev, postane človek bolj stabilen (slika 5.3 B) in padec je manj verjeten. Kar spomnimo se, kako na široko stojimo v zibajočem se avtobusu. Uporaba palice (slika 5.3 C) pa še dodatno poveča podporno ploskev. Na sliki 5.4 je s črtkano črto prikazana velikost podporne ploskve pri uporabi bergele. Dokler je projekcija težišča znotraj podporne ploskve, pacient ne pade.

5.4 Določanje težišča telesa

Slika 5.5: Določitev težišča z obešanjem predmeta





Slika 5.6: Richerjeva tehtnica za določanje težišča telesa

5.4.1 Določanje težišča telesa z obešanjem

Če poljuben predmet obesimo na vrstico, se bo ta vedno postavil tako, da bo njegovo težišče pod točko obešenja. Le tedaj je namreč vsota vseh navorov enaka nič in predmet miruje. Težišče predmeta lahko torej določimo tako, da predmet večkrat na različne načine obesimo na vrstico. Kot je prikazano na sliki 5.5, dobimo na tak način več smeri in tam, kjer se sekajo, je iskano težišče predmeta. To seveda ni nujno znotraj telesa, ampak je lahko tudi zunaj njega.

5.4.2 Starejši načini določanja težišča človeškega telesa

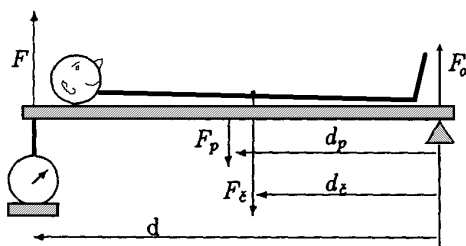
Določanje težišča človeškega telesa z Richerjevo tehtnico

Richerjeva tehtnica je ravna, sorazmerno lahka podlaga, obešena v eni točki. V naši izvedbi je v obesišču pritrjena tudi utež, ki nam kaže smer težišča (slika 5.6). Najprej določimo lego težišča podlage (T_p), in sicer tako, da določimo točko, proti kateri kaže utež, kadar opazujemo samo podlago. Nato določimo skupno težišče človeka in podlage (T_s). Težišče človeka (T_c) pa leži na zveznici težišča podlage in skupnega težišča, in sicer za $d_c = d_p \cdot \left(\frac{m_p}{m_c}\right)$ oddaljeno od skupnega težišča. Pri tem sta m_p in m_c masi podlage in človeka ter d_p razdalja težišča podlage od skupnega težišča.

Določanje težišča človeškega telesa z Lowettovo metodo

Lowettova metoda za določitev lege težišča je prikazna na sliki 5.7. Podlaga s težo F_p je podprta v eni točki, na drugi strani pa je naslonjena na tehtnico. Legu težišča (d_c) človeka s težo F_c , ki leži na podlagi, določimo iz pogoja za ravnovesje navorov glede na podporno točko.

$$F \cdot d = F_c d_c + F_p d_p,$$



Slika 5.7: Lowettova tehnika za določanje težišča telesa

Tabela 5.1: Približne mase posameznih telesnih delov človeka z maso 60 kg

glava	4 kg	stegno	7 kg	nadlaket	2 kg
trup	26 kg	golen	3 kg	podlaket	1.5 kg
		noga	1 kg	roka	0.5 kg
skupaj	30 kg	spodnji ud	11 kg	zgornji ud	4 kg

kjer je F sila na tehtnico in d_p lega težišča podlage. To lahko določimo, če poskus ponovimo samo s podlago, brez človeka. Če je tedaj tehtnica pokazala silo F_1 , potem je lega težišča podlage $d_p = \frac{F_1 d}{F_p}$. Dobimo:

$$F \cdot d = F_\epsilon d_\epsilon + F_1 d,$$

ali

$$d_\epsilon = d \cdot \frac{F - F_1}{F_\epsilon}.$$

5.4.3 Stabilometrija

Pokončna človeška stoja je aktiven proces, v katerem sodeluje več senzoričnih in motoričnih sestavov. Zato telo nikoli popolnoma ne miruje. Lega težišča se pri tem giblje na neurejen, slučajen način, vendar tako, da ostaja vseskozi nad podporno ploskvijo telesa. Ta nihanja se s starostjo spreminjajo, največja so v mladosti in starosti. Že pred stotimi leti je Romberg ugotovil, da se gibanje težišča poveča pri zaprtih očeh ali pri zmanjšani podporni ploskvi.

Gibanje projekcije težišča po podporni ploskvi določimo z reakcijsko ploščo (slika 5.8). To je plošča, ki stoji na štirih podporah, v katerih so senzori občutljivi na pritisk. Ti so povezani z računalnikom, kjer sproti izračunavamo položaj projekcije težišča. S posebnim programom lahko iz tako dobljenih podatkov narišemo



Slika 5.8: Stabilometrija: meritev gibanja projekcije težišča pri mirni pokončni stoji. (Biomehanski laboratorij Zdravstvene fakultete)

gibanje projekcije težišča na podporni ploskvi - tako sliko imenujemo **stabilogram** (slika 5.9) ter izračunamo določene parametre stabilograma povezane njegovo površino in obliko.

5.5 Določanje skupnega težišča več telesnih delov

Človeško telo je sestavljeno iz segmentov, katerih vsak ima svojo maso, obliko in velikost. Pogosto je pomembno poznati skupno maso in lego skupnega težišča več telesnih delov. V ta namen moramo poznati lege težišč in mase posameznih delov.

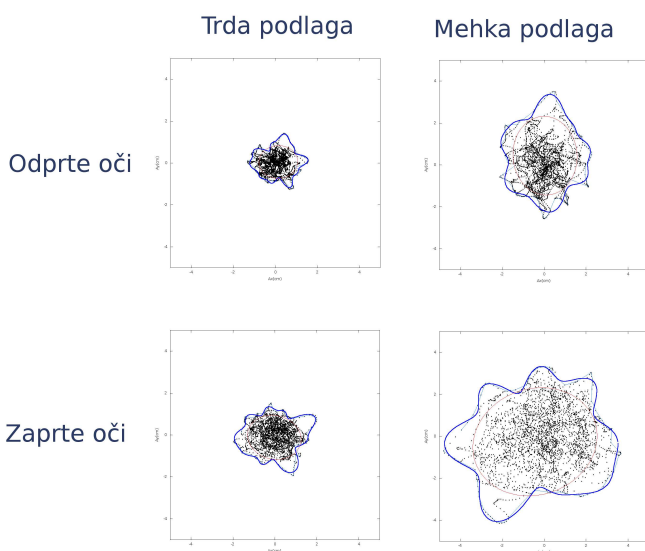
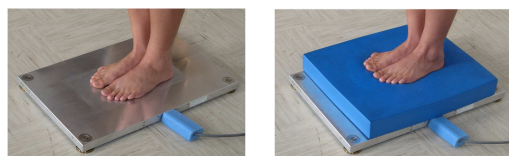
Za približno oceno si lahko zapomnimo mase telesnih delov, ki so v tabeli 5.1 podane za človeka z maso 60 kg.

Natančnejše rezultate meritev mase telesnih delov in leg njihovih težišč prikazuje slika 5.10.

Skupno težišče sistema dveh telesnih delov leži na zveznici med težiščema obeh delov. Njegovo lego določimo tako, da je vsota obeh navorov glede na os v težišču enaka nič. Tedaj velja: $m_1 d_1 = m_2 d_2$, kar lahko zapišemo tudi kot:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

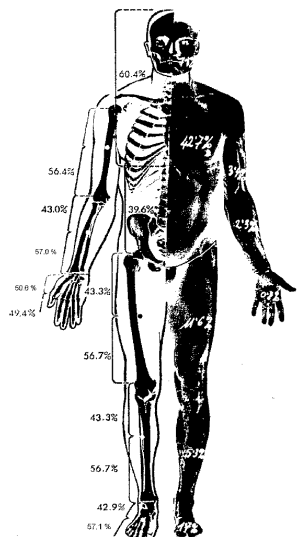
Skupno težišče sistema več telesnih delov pa določimo tako, da najprej določimo skupno težišče poljubnih dveh delov, nato dodamo še en del, zopet določimo



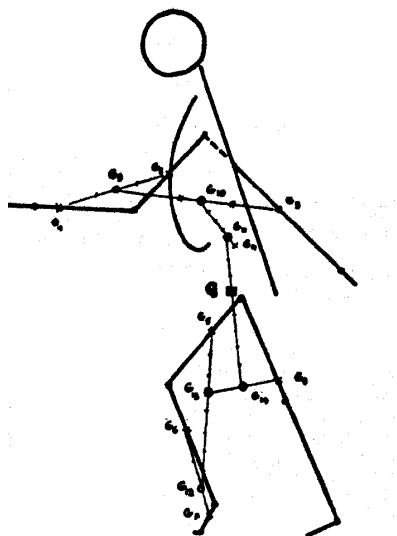
Slika 5.9: Primer stabilogramov zdrave mlade osebe pri različnih pogojih: odprte, zaprte oči ter stoja na trdi in mehki podlagi. Na slikah je označen tudi obris področja stabilograma. (Biomehanski laboratorij Zdravstvene fakultete)

skupno težišče in tako naprej za vse dele.

Namesto računanja lahko skupno težišče določimo tudi grafično. Metoda je prikazana na sliki 5.11.



Slika 5.10: Lega težišča posameznih segmentov človeškega telesa je podana na levi strani slike v odstotkih dolžine segmentov. Desna stran slike pa prikazuje mase segmentov kot deleže celotne telesne mase.



Slika 5.11: Metoda grafičnega določanja skupnega težišča več telesnih segmentov

5.6 Vprašanja

1. Zakaj nastane težnostni pospešek? Kako se spreminja glede na položaj na Zemlji?
2. Z večkratnim obešanjem določi težišče nekaterih predmetov okoli sebe.
3. Na sliki 4.9 na strani 63 približno nariši lego težišča zgornjega uda.

4. Kako se spremeni težišče telesa, kadar skrčiš noge (glej sliko)?

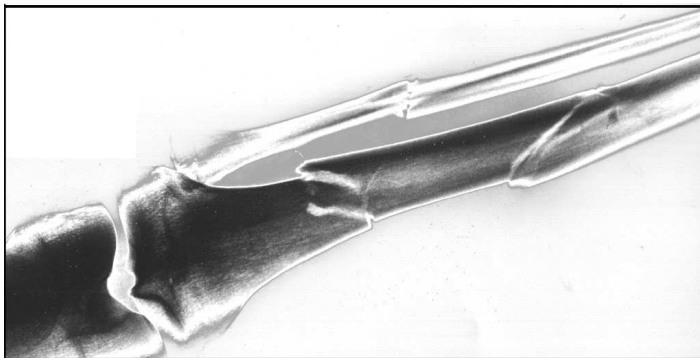


5. V ogliščih enakostraničnega trikotnika s stranico 1 m so majhne kroglice z masami 1 kg, 3 kg in 5 kg. Grafično in računsko določi skupno težišče krogel.
6. Vrh 55 m visokega poševnega stolpa v Pisi je premaknjen za 4,5 m od navpičnice. Obravnavaj stolp kot valj s premerom 7 m in izračunaj:
 - kolikšen je kot med navpičnico in osjo stolpa,
 - za kolikšen kot se lahko nagne os stolpa, preden se ta prevrne,
 - za kolikšno razdaljo se bo tedaj odmaknil vrh stolpa od svoje začetne (pokončne) lege.

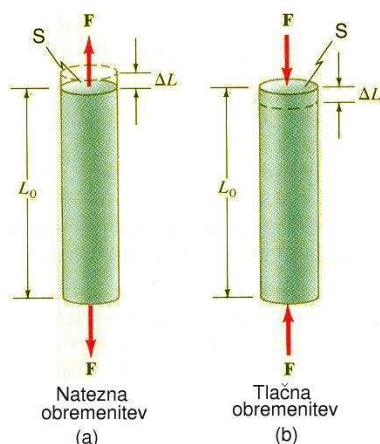


6

ELASTIČNOST: SILA IN DEFORMACIJE



Slika 6.1: Rentgenska slika zloma leve goleni dvajsetletnega dekleta, ki jo je podrl avto pri prečkanju ceste. Videti je zlomljeno mečnico in dvakratni zlom golenice. Distalni zlom ima spiralno obliko, ki je posledica torzijske obremenitve, proksimalni pa je najverjetneje posledica udarca, ki je prelomil tudi mečnico.



Slika 6.2: Natezna (a) in tlačna (b) obremenitev.

6.1 Deformacije pri nategu ali tlaku

Sila je količina, ki povzroči deformacijo telesa. Vzemimo za primer tanko žico dolžine ℓ . Če nanjo obesimo utež, se žica raztegne. Pravimo, da na žico deluje sila teže uteži. Sila je vektor, saj ima določeno smer – teža na primer deluje vedno v smeri proti središču Zemlje. Dokler je raztezek majhen, v primerjavi z dolžino žice, je sila kar sorazmerna raztezk in je torej raztezek merilo za velikost sile. Velja

$$F = k\Delta\ell, \quad (6.1)$$

kjer je F sila, $\Delta\ell$ raztezek in k razteznostni koeficient žice. To linearno zvezo imenujemo Hookov zakon (po Robertu Hooku, 1635–1703, glej stran 253).

Razteznostni koeficient žice pa seveda ni odvisen le od materiala, iz katerega je narejena. Takoj lahko uganemo, da bo raztezek manjši za debelejšo žico – je torej obratno sorazmeren preseku žice (S). Prav tako pa pričakujemo, da se bo pri enaki sili daljša žica bolj raztegnila. Gornjo enačbo lahko zato zapišemo:

$$F = E \frac{S}{\ell} \Delta\ell,$$

kjer je modul elastičnosti (E) odvisen le od materiala žice. To zvezo zapišemo v obliki:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta\ell}{\ell}, \quad (6.2)$$

ki nam pove, da je napetost ($\frac{F}{S}$) sorazmerna relativnemu raztezk ($\frac{\Delta\ell}{\ell}$) žice.

Tabela 6.1: Moduli elastičnosti nekaterih snovi

Snov	Modul elastičnosti [N/m ²]
jeklo	2×10^{11}
baker	$1,1 \times 10^{11}$
kost(nateg)	2×10^{10}
kost(tlak)	$0,9 \times 10^{10}$
steklo	7×10^{10}
aluminij	7×10^{10}
les	$\sim 10^{10}$
tendon	2×10^7
hrustanec (rebra)	$1,2 \times 10^7$
guma	10^6
krvne celice	$\sim 2 \times 10^5$

Silo navadno merimo v newtonih (N). Teža mase enega kilograma je 9,8 N, oziroma približno 10 N. Če presek merimo v kvadratnih metrih, je enota za napetost N/m².

Modul elastičnosti (E) imenujemo tudi Youngov modul in ga merimo v enakih enotah kot napetost. V tabeli 6.1 so podane vrednosti modula elastičnosti za nekatere snovi, izbrani podatki za nekatere kosti pa so podani v tabeli 6.2.

Primer 6.20

Izračunajmo, za koliko se bo raztegnila 10 m dolga jeklena žica debeline 1 mm, če nanjo obesimo utež z maso 1 kg.

Iz premera žice (d) izračunamo njen presek: $S = \pi(\frac{d}{2})^2 = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.

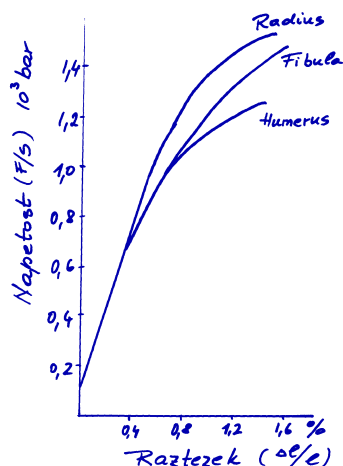
Napetost je tedaj: $\frac{F}{S} = \frac{10 \text{ N}}{7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2} = 1,27 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$.

Iz enačbe 6.2 nato izračunamo raztezek:

$$\Delta \ell = \frac{\ell}{E} \left(\frac{F}{S} \right) = \frac{10 \text{ m}}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} \cdot 1,27 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}.$$

• • •

Slika 6.3: Zveza med napetostjo in raztežkom za nekatere kosti oseb starih med 20 in 39 leti



Primer 6.21

Če na 40 m dolgo vrv debeline 11 mm obesimo maso 60 kg, se vrvi raztegne za 15 cm. Kolikšen je modul elastičnosti te vrvi?

Iz enačbe 6.2 dobimo:

$$E = \frac{F}{S} \frac{\ell}{\Delta \ell}$$

$$E = \frac{600 \text{ N}}{9,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2} \cdot \frac{40 \text{ m}}{0,15 \text{ m}} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2.$$

• • •

Seveda pa preprosta linearna zveza med napetostjo in raztežkom velja le, dokler so deformacije majhne, dokler smo v območju sorazmernosti. To vidimo tudi iz slike 6.3, kjer je prikazana zveza med napetostjo in raztežkom za nekatere kosti. Kot vidimo, postanejo pri večjih obremenitvah raztezki vse večji, dokler se kost ne pretrga. Napetost, pri kateri se to zgodi, imenujemo natezno trdnost in je za nekatere kosti podana v tabeli 6.2.

Do sedaj smo obravnavali le deformacije kosti pri nategu. Kosti pa so bolj pogosto obremenjene tako, da jih stiskamo, torej nanje deluje tlak (slika 6.2(b)). V tem primeru je seveda vsa obravnava enaka kot pri nategu, le vrednosti za modul elastičnosti in tlačno trdnost so nekoliko drugačne.

Kot je prikazano v tabeli 6.1, je modul elastičnosti kosti pri tlačni obremenitvi navadno skoraj polovico manjši kot pri natezni obremenitvi. Velja tudi, da je tlačna trdnost kosti za približno polovico večja od natezne trdnosti. Za homogene snovi, kot npr. železo, pa je modul elastičnosti enak pri tlačnih in nateznih obremenitvah.

Tabela 6.2: Lastnosti nekaterih človeških kosti pri nategu

Kost	Natezna trdnost [10^8 N/m^2]	Modul elastičnosti [10^{10} N/m^2]	Upogibna trdnost [10^8 N/m^2]
stegenica	1,21	1,72	2,08
golenica	1,40	1,80	2,13
mečnica	1,46	1,85	2,16
nadlahtnica	1,22	1,71	2,11
koželjnica	1,49	1,85	
podlahtnica	1,48	1,84	

Primer 6.22

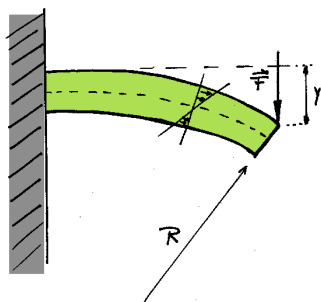
S kolikšno silo še lahko obremenimo stegenico, da ne pride do zloma?

Iz tabele 6.2 lahko preberemo, da je natezna trdnost stegenice $1,21 \times 10^8 \text{ Nm}^{-2}$. Če je pri odraslem človeku najmanjši presek stegenice 6 cm^2 , lahko izračunamo, da stegenica pri nategu zdrži obremenitev: $F = 7,2 \times 10^4 \text{ N}$. Ker je tlačna trdnost stegenice večja od natezne trdnosti, pričakujemo, da bo stegenica prenesla tlačne obremenitve okoli 10^5 N . Ta sila je videti zelo velika, saj je približno stokrat večja od teže telesa. Vendar pa jo kaj lahko presežemo, če po skoku z nekaj metrov višine togo pristanemo na tleh.

• • •

6.2 Deformacije pri upogibu

Pogosto nas zanimajo take deformacije, pri katerih se dolg predmet upogne. Kot primer si oglejmo palico, ki je na enem koncu toga vpeta, na drugem pa nanjo deluje sila F – glej sliko 6.4! Kot vidimo, se je spodnji del palice raztegnil, zgornji pa skrčil. Nekje v palici mora torej obstajati tudi taka ravnina, ki ni niti raztegnjena niti skrčena. Imenujemo jo nevtralna ravnina. Upogib palice na koncu (y_ℓ) je seveda sorazmeren sili, ki deluje na palico, in dolžini palice. Enako obremenjena palica se bo bolj upognila, če bo daljša. Poleg tega pa bo upogib tudi obratno sorazmeren modulu elastičnosti snovi, iz katere je palica narejena. Večji modul elastičnosti (E) namreč pomeni, da je potrebna večja sila za enak raztezek palice enakih dimenzij. Pričakujemo pa tudi, da bo upogib palice odvisen od oblike njenega preseka. Iz prakse namreč vemo, da se nosilci, ki imajo v prerezu obliko črke I, pri enaki



Slika 6.4: Upogib na enem koncu obremenjene palice

obrementivi manj upognejo, kot okrogli nosilci enakega preseka.

To sklepanje nam potrdi tudi podrobnejša matematična analiza, ki je podana v poglavju 6.2.1. Za upogib palice dolžine ℓ , ki je obremenjena v sredini (slika 6.5), dobimo:

$$y_s = \frac{\ell^3}{48EI} F. \quad (6.3)$$

V tej enačbi je ℓ dolžina palice, E modul elastičnosti in I ploskovni vztrajnostni moment palice.

Ploskovni vztrajnostni moment (I) je nekakšna mera za to, kako se določena oblika preseka palice upira upogibanju. Izračunamo ga z integriranjem po celotni površini preseka (dS):

$$I = \int x^2 dS, \quad (6.4)$$

kjer je x oddaljenost od nevtralne ravnine. Vidimo, da je ploskovni vztrajnostni moment za enako velik presek tem večji, čim večji njegov del je bolj oddaljen od nevtralne ravnine. Tako ima na primer telo kvadratnega preseka večji ploskovni vztrajnostni moment in se torej bolj upogne, kot telo z enako velikim okroglim presekom.

Za palico okroglega preseka s polmerom r nam da enačba 6.4

$$I_{\bigcirc} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (6.5)$$

Kadar pa je presek palice pravokoten, s stranicama a in b , pa je

$$I_{\parallel} = \frac{a^3 b}{12}, \quad (6.6)$$

kjer je palica obremenjena tako, da sila deluje vzporedno s stranico a . Ploskovni vztrajnostni moment palice s pravokotnim presekom je torej sorazmeren tretji potenci njene debeline.

6.2.1 Matematična izpeljava deformacije pri upogibu

Dokler je upogib palice majhen, ga lahko opišemo z radijem upogiba (R).

Raztezek plasti, ki je oddaljena za x do nevtralne ravnine, je:

$$\delta\ell = x\alpha \approx x\alpha.$$

Poleg tega pa velja tudi

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{\ell}{R}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je, kadar je upogib zelo majhen, krivinski radij (R) zelo velik in kot α zelo majhen. Tedaj dobimo relativni raztezek plasti, ki je za x oddaljena od nevtralne ravnine, kot:

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = \frac{x}{R}.$$

Relativni raztezek pa je sorazmeren napetosti v tej plasti in modulu elastičnosti (E):

$$\frac{F}{S} = E \frac{x}{R}.$$

Izračunajmo sedaj navor v ploskvi dS , ki je za x oddaljena od nevtralne ravnine:

$$dM = x dF = \frac{E}{R} x^2 dS.$$

Celoten navor na presek palice pa dobimo, ko seštejemo vse prispevke dM , torej z integriranjem po preseku:

$$M = \frac{E}{R} \int x^2 dS,$$

ali

$$M = \frac{EI}{R}. \quad (6.7)$$

Upogib palice pa je obratno sorazmeren krivinskemu radiju (R)

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}. \quad (6.8)$$

Dokler je upogib palice majhen in torej krivinski radij velik, pa lahko upogib (y) zapišemo kot funkcijo koordinate vzdolž palice (z):

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dz^2},$$

oziroma

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EI}.$$

Integral $\int x^2 dS$ je odvisen le od oblike preseka palice. Imenujemo ga ploskovni vztrajnostni moment (I) in je nekakšna mera za to, kako se določena oblika preseka palice upira upogibanju. Ploskovni vztrajnostni moment je pravzaprav drugi moment površine preseka.

$$I = \int x^2 dS. \quad (6.9)$$

Vidimo, da je ploskovni vztrajnostni moment za enako velik presek tem večji, čim več mase je čim bolj oddaljene od nevtralne ravnine. Telo kvadratnega preseka se torej dosti bolj upogiba, kot telo z isto maso in npr. oblike črke I.

Za pravokotni presek palice debeline a in širine b , kjer sila deluje v smeri stranice a , lahko izračunamo:

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 b dx = \frac{a^3 b}{12}.$$

Ploskovni vztrajnostni moment kvadratne palice je torej sorazmeren tretji potenci debeline palice. Dvakrat debelejša palica se torej osemkrat manj upogne!

Za vajo premisli, kako se spremeni I , kadar palico s kvadratnim presekom obrnemo za 90° , tako da sedaj deluje sila v smeri stranice b !

Za ploskovni vztrajnostni moment valja s polmerom r pa dobimo:

$$I_{\text{valj}} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Izračunajmo še upogib palice, ki je prikazana na sliki 6.4! Navor sile F se vzdolž palice spreminja z razdaljo od pritrdišča (z):

$$M = F(\ell - z),$$

kjer je ℓ celotna dolžina palice. V ravno-
vesju, ko palica miruje, mora biti ta navor
ravno enak navoru zaradi deformacije:

$$M = \frac{EI}{R}.$$

Tako dobimo:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{F}{EI}(\ell - z).$$

To enačbo lahko dvakrat integriramo in
dobimo velikost upogiba na koncu palice:

$$y_\ell = \frac{\ell^3}{3EI} F. \quad (6.10)$$

Kaj pa palica, ki je podprta na obeh kon-
cih in obremenjena s silo F v sredini (slika
6.5)? Mislimo si jo sestavljeno iz dveh pa-
lic polovične dolžine $\ell/2$, katerih vsaka je
vpeta na enem koncu, na drugem pa deluje
sila $F/2$. Upogib na sredini je tedaj:

$$y_s = \frac{(\frac{\ell}{2})^3 \frac{F}{2}}{3EI} = \frac{\ell^3}{48EI} F.$$

6.3 Torzijske deformacije

Predstavljajmo si na enem koncu vpet valj. Na njegovem prostem koncu naj deluje
dvojica sil, kot je prikazano na sliki 6.6. Tedaj deluje navor v smeri osi valja.
Njegova posledica je zasuk prostega konca valja za kot φ .

$$M = D\varphi, \quad (6.11)$$

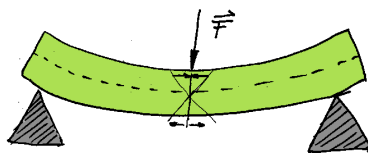
kjer je D direkcijska konstanta. Odvisna je od dolžine valja (ℓ), strižnega modula
snovi (G) in polarne vztrajnostnega momenta (I_p).

$$D = GI_p/\ell.$$

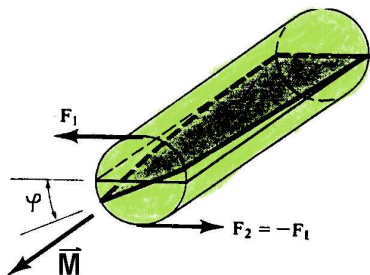
Polarni vztrajnostni moment je odvisen od oblike telesa in je za valj s polmerom r :

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (6.12)$$

Ker je polarni vztrajnostni moment valja sorazmeren četrti potenci polmera,
bomo lahko z enakim navorom dvakrat debelejšo kost zasukali za 16-krat manjši
kot ($16 = 2^4$).



Slika 6.5: Upogib v sredini obre-
menjene palice



Slika 6.6: Valj dolžine ℓ in polmera r zasukamo na enem koncu z dvojico sil za φ . To povzroči navor v smeri osi in torzijsko deformacijo valja.

Tabela 6.3: Trdnost človeških kosti pri torziji

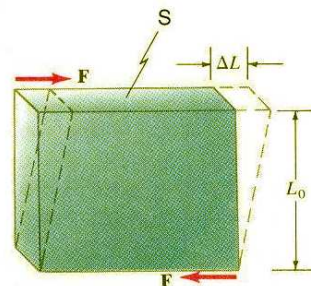
Kost	Največji navor [Nm]	Največji kot
stegenica	140	$1,5^\circ$
golenica	100	$3,4^\circ$
mečnica	12	$35,7^\circ$
nadlahtnica	60	$5,9^\circ$
koželjnica	20	$15,4^\circ$
podlahtnica	20	$15,2^\circ$

Podobno kot pri nategu, tudi pri torzijski obremenitvi obstaja meja trdnosti. Kadar navor preseže mejo torzijske trdnosti, se snov zlomi. Meje torzijske trdnosti in največji koti zasuka za nekatere kosti so podani v tabeli 6.3.

6.3.1 Primer: torzijski zlom golenice

Kot primer si oglejmo torzijski zlom golenice. Tak zlom lahko nastane pri smučanju, kadar na primer pri padcu noga ostane pritrjena na eno od smuč, ki jo težak moker sneg z določeno silo drži v prvotni smeri. Pri padcu telo smučarja povzroči navor na gornji del golenice. Kadar je ta navor večji kot 100 Nm (glej tabelo 6.3), pride do torzijskega zloma golenice. Privzemimo, da je razdalja od čevlja do konice smuč 1 m. Vidimo, da se kost torzijsko zlomi kadar se sneg upira zasuku konice smuč s silo večjo od 100 N. Zaradi velike ročice, ki jo predstavlja dolžina smuč, sorazmerno majhna sila (100 N ustreza teži mase 10 kg) povzroči velike navore, ki delujejo na nogo.

Pri smučanju navadno poskušamo nevarnost zlomov zmanjšati z uporabo varnostnih vezi. Pri teh je sprednji del čevlja vpet, tako da se pri določeni sili, ki deluje prečno na smer smuči, vez sprostí. Silo, pri kateri se vez odpre, lahko nastavimo. Če je dolžina smučarskega čevlja 30 cm, lahko izračunamo, da se mora vez odpreti, preden sila doseže vrednost 330 N. To je namreč sila, ki povzroči navor $M = 330 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} = 100 \text{ Nm}$ na golenico.



Slika 6.7: Strižna obremenitve snovi

6.4 Strižne deformacije

Pri strižni obremenitvi delujeta vzdolž dveh vzporednih ploskev telesa nasprotno enaki sili (6.7). Primer strižne obremenitve si lahko ponazorimo tako, da položimo knjigo na mizo, damo nanjo roko in vlečemo vzporedno s površino mize. Če je knjiga dovolj debela, bomo opazili, da se pri tem poskuša deformirati. Velikost strižne deformacije ($\Delta\ell$) je odvisna od razdalje med ploskvama (ℓ), v našem primeru je to debelina knjige, sile (F), velikosti ploskve (S) in seveda vrste snovi, kar popišemo s strižnim modulom (G):

$$\Delta\ell = \ell \frac{F}{S} \frac{1}{G}.$$

Iz tega dobimo podobno zvezo, kot za natezno ali tlačno obremenitev, le da pri strigu deluje sila (F) vzporedno s ploskvijo (S):

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta\ell}{\ell}.$$

Strižni moduli so za večino snovi nekajkrat manjši od modula elastičnosti (E).

In še razmislek: Zakaj se strižna obremenitev imenuje tako, kot se? Kako pa režejo škarje? Obe rezili se premikata vzporedno, v majhni razdalji, drugo mimo drugega. Pri rezanju s škarjami je snov zares strižno obremenjena.

6.5 Povzetek

Obremenitev na nateg ali tlak: $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell}$

$\frac{F}{S}$ – napetost

$\frac{\Delta \ell}{\ell}$ – relativni raztezek

E – modul elastičnosti

Hookov zakon: $F = k \Delta \ell$

Delo pri raztezk: $A = \int_0^\ell kx dx = \frac{1}{2} k \ell^2$

Upogib:

V sredini obremenjena palica: $y_s = \frac{\ell^3}{48EI} F$

Ploskovni vztrajnostni moment: $I = \int x^2 dS$

Torzijska obremenitev: $M = D\phi$

D – direkcijska konstanta

Strižna obremenitev: $\frac{F}{S} = G \frac{\Delta \ell}{\ell}$

G – strižni modul



Slika 6.8: 266 m dolg in 49 m visok most preko reke Gard v Provansi (Pont du Gard) so zgradili Rimljani leta 19 pr. n. š. kot akvadukt in že dva tisoč let kljubuje času.

6.6 Vprašanja

1. Na 3 m dolgo jekleno žico premera 1 mm obesimo utež z maso 1 kg. Za koliko se bo žica raztegnila?
2. Oceni silo, ki je povzročila zlom golenice na sliki 6.1. Približno določi presek kosti in uporabi podatke za njeno upogibno trdnost.
3. Kakšen je pomen ploskovnega vztrajnostnega momenta?
4. Zakaj se pri torzijski obremenitvi goleni zlomi golenica in ne mečnica, čeprav ta prenese manjše navore (glej tabelo 6.3)?
5. Oglej si sliko 6.8 in pojasni, kako so obremenjeni posamezni deli mostu.
6. Na sliki je star grški templj v Atenah. Pojasni razliko v gradnji med njim in rimskim akvaduktom na sliki 6.8.



7. Slika prikazuje vhod v rimski tempelj. Ali lahko razumeš zakaj je vodoravni kamniti del nad vrati razpokan predvsem na spodnji strani?



8. Prostovoljec, privezan na elastično vrv, skoči v globino. Pojasni, kako se pri tem spreminja energija.



7

DINAMIKA



Slika 7.1: Ob obisku cesarja Ferdinanda v Magdenburgu leta 1654 so pripravili fizikalni poskus.



Slika 7.2: Sir Isaac Newton, 1642–1727. Je utemeljitelj klasične mehanike. Z gravitacijsko silo je pojasnil gibanje planetov, izumil je infinitezimalni račun, ukvarjal pa se je tudi z optiko.

7.1 Uvod

V poglavju 3 smo se ukvarjali z opisom gibanja. Spoznali smo različne vrste gibanja in pomembne količine pri njih, kot so na primer pot, hitrost, pospešek ... To je **kinematika**. Nismo pa se spraševali, zakaj gibanje nastane. S tem vprašanjem se ukvarja **dinamika**, ki analizi gibanja doda dva nova pojma: sila in masa.

Čeprav so k razumevanju osnov dinamike pripomogli mnogi znanstveniki, je šele Isaac Newton leta 1687 v svoji knjigi *Matematični principi filozofije narave* sistematično pojasnil osnove dinamike na podlagi treh trditev, ki jih danes poznamo pod imenom Newtonovi zakoni. Ti trije zakoni so osnovni zakoni mehanike iz dveh razlogov. So posledica opazovanj gibanja in so osnovni, ker jih ne moremo z logičnim razmišljanjem izpeljati ali dokazati s pomočjo drugih principov. Poleg tega pa nam omogočajo razumevanje gibanja okoli nas in so osnova **klasične mehanike**. Vendar pa niso splošno veljavni. Pri velikih hitrostih (blizu svetlobne hitrosti) in za zelo majhne predmete moramo Newtonove zakone dopolniti s spoznanji relativnostne teorije in kvantne mehanike.

7.2 Prvi Newtonov zakon

Kaj torej povzroči gibanje? Kaj je tisto, kar poganja nebesna telesa, da se gibljejo po vesolju? To je vprašanje, ki je tisočletja zaposlovalo znanstvenike in filozofe. Zdrav razum in izkušnja nam namreč pravita, da se vsaka stvar, ki je ne poganjamo, prej ali slej ustavi.

Pa naredimo poskus. Vzemimo kovanec in ga s prstom potiskajmo po mizi. Prst

deluje na kovanec s silo v vodoravni smeri in kovanec se giblje. Ko sila preneha, se kovanec zelo kmalu ustavi. Kaj pa, če ponovimo poskus na ledu? Vidimo, da se kovanec giblje dalj časa po tem, ko smo ga prenehali potiskati. Zakaj nastane razlika? Seveda, boste rekli, led je bolj gladek kot miza in zaradi manjšega trenja se kovanec pozneje ustavi. Pa si mislimo še bolj gladko podlago. Kovanec se bo po njej gibal še dalj časa. Kdaj se kovanec ustavi torej sploh ni lastnost kovanca, ampak trenja med podlago in kovancem. To trenje povzroča silo, ki zavira gibanje kovanca. In če bi bila podlaga tako idealno gladka, da trenja sploh ne bi bilo, se kovanec sploh ne bi nikoli ustavil. Tako vidimo, da nas je "zdrav razum" povsem napačno prepričeval, da je za gibanje potrebna sila. Ne, sila je tista, ki povzroči, da se kovanec končno ustavi. Tako smo prišli do zelo pomembnega spoznanja.

Vsako telo, na katerega ne deluje zunanja sila, se giblje s stalno hitrostjo.

To trditev imenujemo **prvi Newtonov zakon**. Zanimivo je, da je do tega spoznanja prišel na podlagi meritev gibanja teles po strminah že Galileo Galilei (glej str. 40).

Ker se hitrost telesa, na katerega ne deluje nobena sila, ne spreminja, je njegov pospešek enak nič. Seveda je stalna hitrost takega telesa lahko tudi nič – tedaj telo miruje.

Prvi Newtonov zakon se zdi v nasprotju z našimi vsakodnevnimi izkušnjami. Ko potisnemo avto, ta sicer dobi določeno hitrost, a se kmalu potem, ko naša sila preneha, ustavi. Pravzaprav opazimo, da se vsa telesa okoli nas prej ali slej ustavijo, če jih ne poganjamo z določeno silo. In zato ni čudno, da je v naši kulturi skoraj dve tisočletji veljalo Aristotelovo (384–322 pr. n. š.) mnenje, da je za vsako gibanje potrebna sila. Saj je to seveda res! Nikoli se namreč ne moremo povsem izogniti trenju, ki zavira gibanja. A tudi trenje je sila. In sicer sila, ki deluje v nasprotni smeri gibanja in ga zato zavira. Torej se avto, ko ga nehamo potiskati, ustavi zato, ker nanj deluje sila trenja. In če želimo, da se bo predmet gibal enakomerno, moramo nanj delovati s silo, ki bo ravno nasprotno enaka sili trenja. Tedaj bo seveda vsota obeh sil, ki delujeta na telo, enaka nič.

Vidimo, da imajo vsa telesa nekakšno **vztrajnost** – upirajo se vsaki spremembi hitrosti. Ta pojav lahko pogosto opazujemo v vsakdanjem življenju. Če stojimo v avtobusu in ta nenadoma zavre, naše telo še naprej vztraja v gibanju. Če ne bomo našli opore, se bomo hitro znašli spredaj pri soferju. Ali pa pri prehranjevanju. Ko želite dodati paradižnikovo omako na pizzo, stresate nadnjo steklenico z omako. Steklenica in omaka se skupaj gibljeta proti pizzzi. Ko roko, v kateri držite steklenico, ustavite, se omaka giblje naprej – upajmo, da proti pizzzi.

Še en komentar prvega Newtonovega zakona je potreben. Besedna zveza "zunanja sila" se seveda nanaša na vsoto vseh zunanjih sil, ki na telo delujejo. Kot smo videli na strani 58, je sila vektor. Zato bi prvi Newtonov zakon pravilneje zapisali:

Kadar je vektorska vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, enaka nič, se to telo giblje s stalno hitrostjo.

Velja pa tudi obratno. Če opazimo, da se neko telo giblje s stalno hitrostjo, potem vemo, da je vsota vseh sil, ki nanj delujejo, enaka nič.

In še odgovor na vprašanje: kaj torej poganja nebesna telesa po vesolju? Nič, dokler se gibljejo enakomerno. Sile zaradi trkov z delci vesoljskega prahu jih seveda malo zavirajo, medsebojne privlačne sile pa lahko le pospešujejo hitrost gibanja ali spreminjajo njeno smer.

7.3 Drugi Newtonov zakon

Sila torej povzroči gibanje. Če hočemo spraviti avto, ki ne vžge, v gibanje, ga moramo potisniti. Za to potrebujemo **silo**. Čim večji je avto, tem večjo silo potrebujemo, da ga spravimo v gibanje. Otroški voziček veliko lažje spravimo v gibanje kot avto, za avtobus pa potrebujemo še večjo silo. Kaj pa, če želimo gibajoče se vozilo ustaviti? Tudi za to je potrebna sila. Sila torej spravi mirujoče telo v gibanje ali ga ustavi. **Sila spremeni hitrost telesa**. Z večjo silo delujemo na predmet, večjo hitrost doseže v enakem času, večji je torej pospešek telesa. Sila (F) je zato sorazmerna pospešku telesa:

$$F = ma \quad (7.1)$$

Sorazmernostni faktor smo označili s črko m in ga imenujemo **masa**. Masa je merilo za količino snovi in je povezana z vztrajnostjo telesa. Po navadi jo merimo v kilogramih. Če je enota za pospešek m/s^2 , nam enačba 7.1 pokaže, da je enota za silo $kg \cdot m/s^2$. To enoto so na čast Isaacu Newtonu poimenovali newton (N). Po Isaacu Newtonu pa se imejuje tudi enačba 7.1: **drugi Newtonov zakon**. Ta zveza predstavlja osnovo mehanike. Pove nam, da je sila sorazmerna masi telesa in njegovemu pospešku.

Vidimo, da je prvi Newtonov zakon pravzaprav že vsebovan v drugem. Kadar ni sile, oziroma je vsota vseh sil, ki delujejo na telo, enaka nič, tudi ni pospeška in se telo giblje enakomerno.

Primer 7.23

Izračunajmo, kolikšna je sila, ki pospeši mirujoč avto z maso 500 kg v eni sekundi do hitrosti 10 m/s. Trenje pri tem zanemarimo.

Ker je pospešek avtomobila $a = \Delta v / t = 10 \text{ m/s}^2$, dobimo:

$$F = 500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}.$$

• • •

Kaj pa, če namesto avtomobila želimo premakniti 500-kilogramski komunikacijski satelit, ki v vesolju breztežnostno lebdi? Sila je seveda enaka kot na Zemlji. Ta je namreč posledica tega, da poskušamo premakniti telo, ki ima maso in zato vztrajnost. Sedaj lahko razumemo tudi razliko med maso in težo telesa. Masa je mera za vztrajnost telesa, **teža** pa je sila, s katero to telo privlači Zemlja. In ker je težnostni pospešek za vsa telesa enak (g), je teža (F_g) po drugem Newtonovem zakonu kar:

$$F_g = mg.$$

Teža je zato sorazmerna masi telesa. Večja kot je masa telesa, večja bo tudi njegova teža. Zato lahko maso teles določimo s tehtanjem. Ko kupimo en kilogram jabolk, prodajalec položi na eno stran dvokrake tehtnice kilogramsko utež, na drugo pa jabolka in primerja teži. Ko sta teži enaki, sta enaki tudi masi. Kaj pa, če prodajalec uporablja vzmetno tehtnico? Tedaj zares meri težo. Kot smo videli na strani 86, je raztezek vzmeti namreč sorazmeren sili (Hookov zakon). Skala take trgovske tehtnice pa je kljub vsemu napisana v kilogramih.

Primer 7.24

Izračunajmo še, kolikšna sila je potrebna, da 1500-kilogramski avto, ki vozi s hitrostjo 100 km/h, ustavimo na razdalji 50 m.

Sila je seveda sorazmerna pospešku (pravzaprav pojemu) avtomobila med zaviranjem.

$$F = ma.$$

Če predpostavimo, da je zaviranje avtomobila enakomerno, lahko zapišemo pojemek

$$a = \frac{0 - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}.$$

V času t se je namreč hitrost avtomobila spremenila od vrednosti v_0 do nič, medtem pa je avto opravil pot:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0 t}{2}.$$

Ker poznamo razdaljo (s), lahko iz te zveze izračunamo čas ustavljanja:

$$t = \frac{2s}{v_0}$$

in to vstavimo v izraz za pospešek. Dobimo:

$$a = -\frac{v_0^2}{2s}.$$

Potrebna sila je torej:

$$F = -m \frac{v_0^2}{2s}.$$

Ta sila je negativna, kar pomeni, da deluje v nasprotni smeri gibanja.

Z našimi podatki dobimo:

$$F = -1500 \text{ kg} \cdot \frac{\left(\frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{2 \times 50 \text{ m}} = -1,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \frac{\left(\frac{10^4 \text{ m}^2}{3,6^2 \text{ s}^2}\right)}{10^2 \text{ m}} = -1,2 \text{ N} \times 10^4 \text{ N} = -12 \text{ kN}.$$

• • •

Primer 7.25

Z dva metra visokega zidu skočimo sonožno na tla. Izračunajmo, kolikšna sila deluje pri doskoku na glavico stegenice.

Hitrost, s katero priletimo na tla, lahko preprosto izračunamo kot

$$v = \sqrt{2gh},$$

kjer je g težnostni pospešek in h višina zidu. To je hitrost, s katero se dotaknemo tal. Naša končna hitrost, ko se ustavimo, pa je nič. Sila na glavico stegenice je seveda odvisna od pospeška (pojemka) med ustavljanjem. Ta pa je, kot smo videli v prejšnjem primeru, odvisen od razdalje ustavljanja. Pri sonožnem doskoku med ustavljanjem po navadi skrčimo kolena in s tem povečamo razdaljo ustavljanja. Če to razdaljo označimo s črko s in uporabimo rezultat prejšnjega primera, dobimo

$$a = -\frac{v^2}{2s}.$$

Sem vstavimo izraz za hitrost in dobimo:

$$a = -\frac{2gh}{2s} = -g \frac{h}{s}.$$

Sila med ustavljanjem je zato:

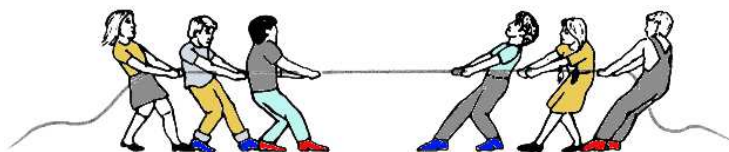
$$F = -mg \frac{h}{s}.$$

Sila je torej odvisna od mase zgornjega dela telesa (m), razmerja med višino skoka (h) in razdaljo ustavljanja (s). Kadar doskočimo sonožno, se seveda sila enakomerno porazdeli na obe spodnji okončini. Sila na glavico stegenice je zato enaka polovici celotne sile:

$$F_{st} = \frac{F}{2}.$$

Če je na primer masa skakajočega človeka $m = 50 \text{ kg}$ in je pri doskoku kolena toliko skrčil, da je bila razdalja ustavljanja 10 cm , dobimo

$$F_{st} = -50 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 5 \cdot 10^3 \text{ N}.$$



Slika 7.3: Kadar vrv miruje, mora biti sila desne skupine nasprotno enaka sili, s katero vlečejo drugi trije otroci proti levi.

Ta sila je zelo velika, saj je približno enaka desetkratni teži človeka. Še večja pa bi bila, če bi poskušali doskočiti s togimi nogami. Tedaj bi bila razdalja ustavljanja odvisna predvsem od elastičnosti spodnjih okončin in zato zelo majhna. Sila bi v tem primeru kaj lahko presegla mejo trdnosti kosti in prišlo bi do zloma.

...

7.4 Tretji Newtonov zakon

Drugi Newtonov zakon pove, kako sile vplivajo na gibanje telesa. Toda od kod sploh pridejo sile? Kot smo videli, vedno eno telo deluje na drugo s silo. Sila je torej posledica vpliva enega telesa na drugo telo.

Ko potiskamo avto, delujemo nanj s svojo silo. Silo potrebujemo zato, da premagamo vztrajnost avtomobila. Avto se očitno upira naši sili. Le spomnite se, kako težko je potiskati avto, kadar je cesta poledenela. S skrčenimi rokami se upremo v avto in roke počasi stegujemo. Namesto da bi se avto premaknil, se mi oddrsamo nazaj. Tudi avto je deloval na nas s silo.

Naredimo še en poskus. Postavimo se pred zaprta vrata in se z rokami močno uprimo vanje. Čutimo, da se vrata naši sili upirajo. Počakajmo, dokler z druge strani nekdo ne odpre vrat. Kaj se zgodi? Ko se vrata odpro, se prenehajo upirati naši sili in tudi mi ne moremo več delovati s silo nanje. S silo lahko delujemo na predmete le v tolikšni meri, kolikor se ti naši sili upirajo.

Spoznamo, da **kadarkoli eno telo deluje na drugo z določeno silo, tudi drugo telo deluje na prvo z enako veliko, a nasprotno usmerjeno silo.**

To spoznanje imenujemo **tretji Newtonov zakon**. Silo, s katero delujemo na telo, imenujemo tudi **akcija**, nasprotno enaka sila, s katero se nam telo upira, pa je **reakcija**.

Oglejmo si sliko 7.3. Skupini sta videti izenačeni in vrv zato miruje. Sila, s katero vlečejo trije otroci proti desni, je zato ravno nasprotno enaka sili leve skupine.

Pa si predstavljajmo, da otroci na levi privežejo vrv na drevo in se le pretvarjajo, da vrv vlečejo. Desna skupina ne bo opazila nobene razlike. Drevo vedno reagira na njihovo silo z nasprotno enako silo.

Podoben primer prikazuje tudi slika 7.1. Narisan je poskus, ki ga je leta 1654 pripravil Otto von Guericke ob obisku cesarja Ferdinanda. Guericke ni bil le župan mesta Magdenburg, ampak tudi izumitelj. Izdelal je zračno črpalko, s katero je izčrpal zrak iz kovinske krogle, sestavljene iz dveh delov. Kot vidimo, je vpregel šestnajst konj, ki so poskušali potegniti polovici krogle narazen. A ni šlo. Zračni tlak je polkrogli obdržal skupaj. Ko pa je pristopil izumitelj in odprl ventil ter s tem spustil zrak v kroglo, sta polovici, na veliko presenečenje vladarja, sami padli narazen.

Razmislimo, ali je Otto von Guericke za ta poskus zares potreboval šestnajst konj. S fizikalnega stališča bi bilo prav vseeno, če bi eno vrv privezal za močno drevo, v drugo pa vpregel osem konj. Le da potem zgodovina ne bi poročala, da "šestnajst konj ni moglo potegniti polkrogel narazen."

Verjetno si težko predstavljamo, kako naj bi mrtvi predmeti delovali na nas z določeno silo. In to silo naj bi pametno prilagajali tako, da bi bila vedno ravno nasprotno enaka naši sili. Opremo se na steno in stena pritiska na nas z ravno pravo silo. Ne odrine nas s preveliko silo, niti nas ne spusti skozi s premajhno silo. Povečamo svojo silo in tudi stena poveča svojo reakcijo. Kako je to mogoče?

Odgovor je zelo preprost. Vse stvari na tem svetu so elastične – ene sicer bolj, druge manj. Pritisnimo na gumijasto žogo. Bolj kot pritiskamo, bolj se žoga upogne in se zato z večjo silo upira našemu pritisku. Kot smo videli na strani 86, se pri elastičnih snoveh sila povečuje z deformacijo. Žoga je precej elastična in se zato že pri majhnih silah vidno deformira. Stena pa je le malo elastična in se, ko nanjo pritismo, le malo deformira – le toliko, kot ustreza naši sili. Če pa bi silo na steno zelo, zelo povečali, bi se tudi ta vidno deformirala in bi se končno, ko bi sila presegla njeno trdnost, povsem nehala upirati.

Primer 7.26

Oglejmo si primer uporabe Newtonovih zakonov. Na ledeni ploskvi stoji avto z maso 1000 kg. Opremo se vanj s silo 300 N in ga poskušamo poriniti. Kaj se zgodi? Avto se seveda zaradi sile prične gibati s pospeškom, ki ga izračunamo s pomočjo drugega Newtonovega zakona:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{300 \text{ N}}{1000 \text{ kg}} = 0,3 \text{ ms}^{-2}.$$

Vendar pa nas pri tem avto odrine z nasprotno enako silo in zato se oddričamo nazaj s pospeškom:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{300 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = -6 \text{ ms}^{-2},$$

kjer smo predpostavili, da je naša masa 50 kg. Minus pa smo napisali zato, da pokažemo, da je smer sile in s tem tudi pospeška v obratno smer od gibanja avtomobila.

Ker je naša masa manjša od mase avtomobila, bo naš pospešek zato ustrezno večji.

Kaj pa, če na noge nataknemo dereze? Sedaj nas avto ne more premakniti nazaj. Avto sedaj ne odriva samo nas, ampak z nami vred celo Zemljo. Ker je masa Zemlje zelo velika (približno 6×10^{24} kg), se bo naš odziv na njenem vrtenju komaj kaj poznal ($a = 5 \times 10^{-23} \text{ ms}^{-2}$).

• • •

7.5 Gibalna količina

Newtonove zakone lahko zelo lepo pojasnimo z gibalno količino (G), ki jo definiramo kot produkt mase in hitrosti telesa:

$$\vec{G} = m\vec{v}. \quad (7.2)$$

Gibalna količina je vektor, ki ima isto smer kot hitrost.

Prvi Newtonov zakon nam torej pove, da je **gibalna količina konstantna, kadar na telo ne deluje nobena zunanja sila**. Pravimo, da se tedaj gibalna količina ohranja in zato to izjavo imenujemo **zakon o ohranitvi gibalne količine**. Količine, ki se pri določenem pojavu ohranjajo so v fiziki zelo pomembne, saj nam omogočajo, da lahko napovemo gibanje, ne da bi nam bilo potrebno poznati vse podrobnosti opazovanega sistema.

Če se na primer izstrelke v zraku razleti v množico drobnih in različnih koščkov, pri tem nanj ni delovala nobena zunanja sila. Zato nam zakon o ohranitvi gibalne količine pove, da bo vektorska vsota gibalnih količin vseh koščkov natančno enaka gibalni količini prvotnega izstrelka.

Podobna bo tudi pri trku dveh delcev vsota gibalnih količin pred trkom enaka vsoti gibalnih količin po trku, neodvisno od tega kaj natančno se je med trkom dogajalo. Bolj podrobno bomo trke obravnavali v naslednjem poglavju.

Kaj pa drugi Newtonov zakon? Ali ga lahko zapišemo z gibalno količino? Ker je pospešek odvod hitrosti po času ($a = \frac{dv}{dt}$) je zato sila odvod gibalne količine po času:

$$F = \frac{dG}{dt}. \quad (7.3)$$

To z drugimi besedami pomeni, da je sila enaka hitrosti spreminjanja gibalne količine.

7.6 Trki

Pri trku dveh teles se gibalna količina ne spremeni, če na telesi ne deluje nobena zunanja sila. To pomeni, da je vsota vseh gibalnih količin pred trkom enaka vsoti gibalnih količin po trku.

Oglejmo si primer. Če trčita dve telesi za masama m_1 in m_2 in sicer tako, da sta bili njuni hitrosti pred trkom v_{1pred} in v_{2pred} , po njem pa v_{1po} in v_{2po} , potem nam zakon o ohranitvi gibalne količine pove, da je vsota gibalnih količin prvega in drugega telesa pred trkom ($G_{1pred} + G_{2pred}$) enaka vsoti gibalnih količin po trku ($G_{1po} + G_{2po}$).

$$G_{1pred} + G_{2pred} = G_{1po} + G_{2po}, \quad (7.4)$$

kar lahko zapišemo kot

$$m_1 v_{1pred} + m_2 v_{2pred} = m_1 v_{1po} + m_2 v_{2po} \quad (7.5)$$

Če hitrosti niso vse v isti smeri, moramo gibalne količine v enačbi (7.5) seveda sešteti vektorsko.

Primer 7.27

Oglejmo si primer. Z obale skoči človek z maso 80 kg na mirujoč čoln, katerega masa je 200 kg. Kaj se zgodi, če je hitrost človeka 2 m/s?

Ker na človeka, niti na čoln ne deluje med njunim trkom nobena dodatna zunanja sila, se gibalna količina pri njunem trku ohrani. V začetku se človek giblje s hitrostjo $v_{1pred} = 2$ m/s, čoln pa miruje ($v_{2pred} = 0$). Po trku pa se človek in čoln gibljeta skupaj z isto hitrostjo (v_{po}).

Ohranitev gibalne količine (en.(7.5)) lahko zato zapišemo kot

$$m_1 v_{1pred} + m_2 \cdot 0 = m_1 v_{po} + m_2 v_{po},$$

kar nam da

$$m_1 v_{1pred} = (m_1 + m_2) v_{po}.$$

Iz tega lahko tako izračunamo hitrost po trku kot

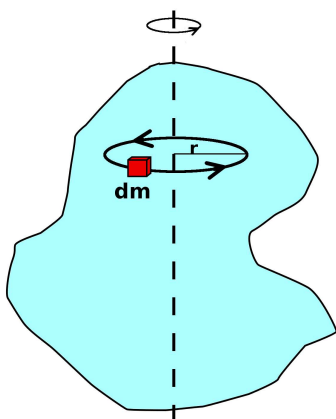
$$v_{po} = \frac{m_1 v_{1pred}}{m_1 + m_2}.$$

Z našimi podatki tako dobimo

$$v_{po} = \frac{80\text{kg} \cdot 2\text{m/s}}{80\text{kg} + 200\text{kg}} = 0,57\text{m/s}.$$

Ko človek skoči na čoln, se oba skupaj torej začeta gibati s hitrostjo 0,57 m/s.





Slika 7.4: Ko se telo vrti okoli izbrane osi delček njegove mase (dm) kroži po krožnici s polmerom r .

Primer 7.28

Kaj pa, če v prejšnjem primeru človek skoči namesto na lahek čoln na ploščad trajekta z maso 200 ton?

Tedaj bi ugotovili, da bi se po trku oba skupaj premikala s hitrostjo

$$v_{po} = \frac{80\text{kg} \cdot 2\text{m/s}}{80\text{kg} + 200000\text{kg}} = 0,0008\text{m/s}.$$

Ker je masa ladje tokrat veliko večja od mase človeka, nam zakon ohranitvi gibalne količine pove, da bo končna hitrost zelo majhna.

• • •

V tem primeru smo obravnavali trk dveh teles, pri katerem sta se telesi po trku gibali skupno z enako hitrostjo. Tak trk imenujemo **neprožni trk**. Kadar pa se telesi pri trku prožno odbijeta, pa trk imenujemo **prožni trk**. Primer takega trka je na primer trk biljardnih krogel. Pri tem se poleg gibalne količine ohrani tudi kinetična energija (glej poglavje 9.3 na strani 135).

7.7 Vrtenje

V poglavju 3.8 smo obravnavali kroženje, ki je gibanje točkastega telesa po krožnici. Sedaj pa si bomo ogledali, kaj se dogaja, kadar se telo vrti okoli določene osi. Oglejmo si najprej majhen delček telesa dm (slika 7.4). Vidimo, da ta delček kroži okoli osi v razdalji r s kotno hitrostjo ω . Njegova hitrost je po enačbi 3.20 enaka $v = r \cdot \omega$. Če na ta delček deluje sila dF v smeri gibanja, tj. v smeri pravokotno na r se ta delček mase giblje pospešeno:

$$dF = a \cdot dm = \frac{dv}{dt} \cdot dm = \frac{r \cdot d\omega}{dt} \cdot dm. \quad (7.6)$$

Ker je kotni pospešek (α) odvod kotne hitrosti po času: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ lahko gornjo enačbo zapišemo kot:

$$dF = r \cdot \alpha \cdot dm. \quad (7.7)$$

Sila dF deluje pravokotno na ročico dolžine r in zato povzroča navor:

$$dM = r \cdot dF = r^2 \cdot \alpha \cdot dm. \quad (7.8)$$

Iz tega lahko sedaj izračunamo celoten navor na vrteče se telo tako, da seštejemo prispevke vseh navorov dM , ki delujejo na delčke mase dm .

$$M = \int dM = \int r \cdot dF = \int r^2 \cdot \alpha \cdot dm. \quad (7.9)$$

Ker je kotni pospešek α enak za vse delčke telesa lahko to enačbo zapišemo kot:

$$M = \alpha \int r^2 dm. \quad (7.10)$$

Integral v tej enačbi je odvisen od porazdelitve mase v vrtečem se telesu - imenujemo ga **vztrajnostni moment**:

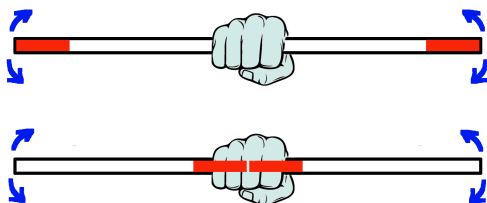
$$J = \int r^2 \cdot dm, \quad (7.11)$$

Na tak način dobimo, da navor, ki deluje na telo, povzroči kotni pospešek α okoli osi vrtenja v odvisnosti od vztrajnostnega momenta:

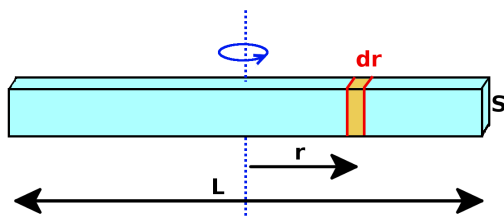
$$M = J \cdot \alpha. \quad (7.12)$$

To zvezo smo izpeljali iz drugega Newtonovega zakona (enačba 7.1) in ima tudi njemu podobno obliko. Vidimo, da ima pri vrtenju vztrajnostni moment podobno vlogo kot masa pri premem gibanju, navor ustreza sili ter kotni pospešek linearnemu pospešku. Ta enačba nam pove, da pri večjem vztrajnostnem momentu potrebujemo večji navor, da dosežemo enak kotni pospešek.

Pomen vztrajnostnega momenta bomo lažje razumeli, če si ogledamo sliko 7.5. Cev v kateri sta dve uteži nismo z vrtenjem zapestja. Opazimo, da se cev veliko bolj upira našemu gibanju, kadar sta uteži na koncu cevi (zgornja slika), kot pa kadar ju pritrdimo v sredini (spodnja slika), kljub temu, da je masa cevi v obeh primerih enaka. Kadar je namreč več mase bolj oddaljene od osi vrtenja je vztrajnostni moment večji (enačba 7.11). Zato tedaj za isti kotni pospešek (α) potrebujemo večji navor (M) in posledično tudi večjo silo mišic (enačba 7.12).



Slika 7.5: Cev v kateri sta dve uteži z zapestjem nihamo.



Slika 7.6: Primer: palica se vrti okoli svoje sredine.

Primer 7.29

Izračunajmo vztrajnostni moment tanke palice s presekom S , dolžino L in gostoto ρ , ki se vrti okoli svoje sredine (slika 7.6). Prostornina rezine debeline dr je $dV = S \cdot dr$, njena masa pa $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot S \cdot dr$. Vztrajnostni moment je tako

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot S \cdot dr = \rho \cdot S \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr,$$

pri čemer smo upoštevali, da sta presek in gostota palice povsod enaka ter integrirali po spremenljivki r na območju od levega konca pri $-L/2$ do desnega konca palice pri $L/2$.

Tako dobimo:

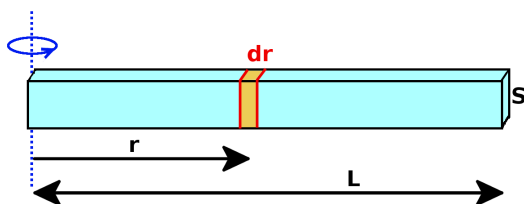
$$J = \frac{1}{3} \rho \cdot S \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} \rho \cdot S L^3.$$

Ker je masa celotne palice $m = \rho \cdot S \cdot L$ lahko vztrajnostni moment zapišemo tudi kot:

$$J = \frac{1}{12} m \cdot L^2. \quad (7.13)$$

Vidimo, da vztrajnostni moment tanke palice ni odvisen od oblike preseka palice, dokler se ta z razdaljo ne spreminja. Zato dobljeni rezultat velja za tanke palice poljubnih oblik, ki se vrtijo okoli svoje sredine.

• • •



Slika 7.7: Primer: palica se vrti okoli enega konca.

Pogosto namesto vztrajnostnega momenta navajamo **vztrajnostni radij telesa**. To je tista oddaljenost od osi vrtenja (R_v), pri kateri bi za kroženje točke s celotno maso telesa dobili enak vztrajnostni moment kot ga ima dano telo. Ker je vztrajnostni moment točke z maso m , ki kroži v razdalji R_v okoli osi enak $J = mR_v^2$ bi tako v prejšnjem primeru (Primer 7.29) iz enačbe 7.13 dobili:

$$J = \frac{1}{12} m \cdot L^2 = mR_v^2$$

kar nam da za vztrajnostni radij palice za vrtenje palice okoli svoje sredine

$$R_v = \frac{L}{2\sqrt{3}}.$$

Primer 7.30

Izračunajmo še vztrajnostni moment tanke palice s presekom S , dolžino L in gostoto ρ , ki se vrti okoli svojega konca (slika 7.7). Podobno kot v prejšnjem primeru (Primer 7.29) dobimo za vztrajnostni moment:

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot S \cdot dr = \rho \cdot S \int_0^L r^2 dr,$$

pri čemer smo integrirali po spremenljivki r na območju od začetka, ko je $r = 0$ do konca pri $r = L$.

Tako dobimo:

$$J = \frac{1}{3} \rho \cdot S L^3.$$

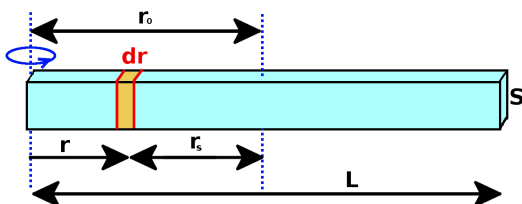
Ker je masa celotne palice $m = \rho \cdot S \cdot L$ lahko vztrajnostni moment zapišemo tudi kot:

$$J = \frac{1}{3} m \cdot L^2. \quad (7.14)$$

Iz tega lahko podobno kot v primeru 7.29 ugotovimo, da je vztrajnostni radij palice, ki se vrti okoli svojega konca

$$R_v = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

...



Slika 7.8: Primer: palica se vrti okoli enega konca. Na sredini je označena os skozi masno središče.

Vztrajnostni moment palice, ki se vrti okoli svojega konca (primer 7.30) bi lahko še bolj enostavno izračunali. Kadar namreč poznamo vztrajnostni moment za vrtenje okoli osi, ki gre skozi masno središče predmeta lahko enostavno izračunamo vztrajnostni moment okoli katerekoli njej vzporedne. Iz slike 7.8 vidimo, da je $r = r_0 - r_s$, kjer sta r_0 razdalja masnega središča predmeta od osi vrtenja in r_s oddaljenosti točke od osi skozi masno središče. Tako dobimo:

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int (r_0 - r_s)^2 \cdot dm = \int (r_0^2 - 2r_0r_s + r_s^2) \cdot dm.$$

Vztrajnostni moment je tako:

$$J = \int r_0^2 \cdot dm - 2 \int r_0r_s \cdot dm + \int r_s^2 \cdot dm. \quad (7.15)$$

Oglejmo si vse tri člene te enačbe. V prvem členu je r_0 oddaljenost masnega središča od osi, ki je seveda enaka za vse točke predmeta. Ta člen je zato:

$$\int r_0^2 \cdot dm = r_0^2 \int dm = r_0^2 m.$$

Drugi člen je nič, če računamo razdalje r_s glede na masno središče.

$$\int r_0r_s \cdot dm = r_0 \int r_s \cdot dm = 0.$$

Masno središče je namreč prav tista točka za katero velja, da je povprečna oddaljenosti vseh masnih točk od nje enaka nič: $\int r_s \cdot dm = 0$.

Tretji člen enačbe 7.15 pa predstavlja vztrajnostni moment telesa glede na os, ki gre skozi masno središče:

$$J_s = \int r_s^2 \cdot dm.$$

Tako smo dobili enostavno zvezo

$$J = r_0^2 \cdot m + J_s, \quad (7.16)$$

ki jo pogosto imenujemo **teorem vzporednih osi**. Ta teorem nam pove, da je vztrajnostni moment okoli poljubne osi kar enak vztrajnostnemu momentu celotne mase telesa združene v masnem središču ($r_0^2 \cdot m$) in vztrajnostnemu momentu okoli vzporedne osi skozi masno središče (J_s).

Primer 7.31

Preverimo, kaj nam da teorem vzporednih osi za vztrajnostni moment palice, ki se vrti okoli svojega konca (Primer 7.30). V Primeru 7.29 smo ugotovili, da je vztrajnostni moment palice, ki se vrti okoli sredine: $J_s = \frac{1}{12} m \cdot L^2$. Masno središče homogene palice v njeni sredini zato smo ta vztrajnostni moment smo označili z J_s saj predstavlja vrtenje okoli osi skozi masno središče. Po enačbi 7.16 je tako vztrajnostni moment palice, ki se vrti okoli enega konca, ki je oddaljen za $r_0 = L/2$ od masnega središča:

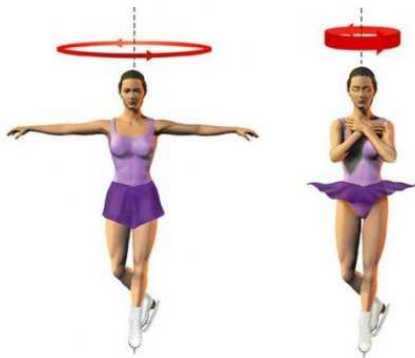
$$J = (L/2)^2 \cdot m + \frac{1}{12} m \cdot L^2 = \frac{1}{3} m \cdot L^2,$$

kar je seveda enako enačbi 7.14, ki smo dobili z integriranjem v Primeru 7.30.

...

Tabela 7.1: Nekaj vztrajnostnih momentov

krogla (polna)	$\frac{2}{5} mR^2$
tanka krogelna lupina	$\frac{2}{3} mR^2$
valj - okoli vzdolžne osi	$\frac{1}{2} mR^2$
tanka palica - os skozi sredino	$\frac{1}{12} mL^2$
tanka palica - os na koncu	$\frac{1}{3} mL^2$



Slika 7.9: Ohranitev vrtilne količine pri drsanju.

7.8 Vrtilna količina

Podobno kot smo pri premem gibanju vpeljali gibalno količino tudi pri vrtenju definiramo **vrtilno količino**:

$$\Gamma = J \cdot \omega. \quad (7.17)$$

Tudi za vrtilno količino velja, da kadar je vsota vseh navorov, ki delujejo na telo, enaka nič, je vrtilna količina konstantna. Ali drugače povedano: vrtilno količino lahko spremenimo samo z navorom, ki deluje na telo.

Primer 7.32

Oglejemo si sliko 7.9! Drsalka se najprej počasi vrti, nato pa skrči roke in s tem zmanjša svoj vztrajnostni moment. Ker se brez zunanje sile vrtilna količina ($\Gamma = J \cdot \omega$) ohranja, se ob zmanjšanju vztrajnostnega momenta (J) poveča kotna hitrost (ω) in drsalka se prične hitreje vrteti. Vrtanje lahko kasneje zmanjša tako, da ponovno razširi roke in s tem poveča svoj vztrajnostni moment.

...

7.9 Povzetek

- **Prvi Newtonov zakon:**

Kadar je vektorska vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, enaka nič, se to telo giblje s stalno hitrostjo.

- **Drugi Newtonov zakon:** $F = ma$.

- **Tretji Newtonov zakon:**

Kadarkoli eno telo deluje na drugo z določeno silo, tudi drugo telo deluje na prvo z enako veliko, a nasprotno usmerjeno silo.

- **Gibalna količina** $\vec{G} = m\vec{v}$

- Gibalna količina je konstantna, kadar na telo ne deluje nobena zunanja sila.

- Neprožni trk: obe telesi se gibljeta po trku skupaj, z isto hitrostjo.

Prožni trk: obe telesi se pri trku odbijeta. Poleg gibalne količine se ohrani tudi kinetična energija.

- **Vztrajnostni moment:** $J = \int r^2 \cdot dm$

- **Teorem vzporednih osi:** $J = r_0^2 \cdot m + J_s$

J_s - vztrajnostni moment okoli osi skozi masno središče,

r_0 - oddaljenost osi od osi skozi masno središče.

- **Vrtenje:** $M = J \cdot \alpha$

- **Vrtilna količina:** $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

- Vrtilna količina je konstantna, kadar na telo ne deluje noben zunanji navor.

7.10 Vprašanja

1. V enem od starih znanstvenofantastičnih filmov se globoko v vesolju pokvari motor vesoljske ladje in ladja se ustavi. Kaj menite o tem dogodku?
2. Po ravni avtocesti se peljete s starim avtomobilom s hitrostjo 90 km/h, ko švigne mimo vas maseratti s hitrostjo 220 km/h. Če se oba avtomobila gibljeta enakomerno, na kateri avto deluje večja celotna sila? Razmisli tudi, motor katerega avtomobila deluje z večjo silo in zakaj.
3. Na ledu se v času 0,5 sekunde s silo 200 N drug od drugega odrineta dva drsalca. Masa prvega je 80 kg, drugega pa 60 kg. Izračunaj, s kakšnim pospeškom se bosta začela gibati in kako daleč se bosta odpeljala v eni sekundi. Trenje ledu zanemari.
4. Ogled si nekaj različnih vrst tehtnic in razloži princip njihovega delovanja.
5. Potapljači, ki so odkrili potopljen zaklad, bi želeli najdene dragocenosti steh-tati, preden bi jih oddali ekipi na površini morja. Ali lahko za to uporabijo dvokrako tehniko? Kaj pa vzmetna tehnika? Premisli, kako bi to lahko naredili.
6. Na ledu drug drugemu nasproti stojita dva drsalca z masama 50 kg in 75 kg. Kaj se zgodi, ko se z rokami medsebojno odrineta?
7. Premisli, ali bi bilo v prejšnjem primeru kaj drugače, če bi se samo en drsalec odrinil od drugega.
8. Človek z maso 80 kg sedi v čolnu in drži v roki žogo mase 1 kg. Kaj se zgodi, ko vrže žogo vodoravno s hitrostjo 3 m/s, če je masa čolna 200 kg?
9. Razmisli, kaj bi se zgodilo, če bi žoga v prejšnjem primeru padla v čoln. Ali bi bilo končno stanje v tem primeru drugačno, kot če bi žoga padla v vodo?
10. Krogla z maso 1 kg se s hitrostjo 1 m/s zaleti v mirujočo kroglo enake mase. Kakšno bi bilo končno stanje, če je trk (a)prožen in (b)neprožen?
11. Dve enaki krogli maso 1 kg se gibljeta druga proti drugi z nasprotno enakima hitrostima 1 m/s. Kaj se zgodi, ko prožno trčita?
12. Kakšno bi bilo v prejšnjem primeru končno stanje, če bi bil trk neprožen?
13. Izračunaj vztrajnostni moment tanke palice, ki se vrti okoli osi na eni tretjini dolžine.

14. Kolikšen je v prejšnjem primeru vztrajnostni radij te palice?
15. Kako se spremeni vztrajnostni moment dolge tanke palice, če os vrtenja premaknemo s sredine palice proti njenemu koncu? Primerjaj rezultat vprašanja št. 13 s primerom 7.29 na strani 110 in enačbo 7.16 na strani 113.

8

TRENJE



Slika 8.1: Tudi na pesku, ne samo na snegu, je mogoče smučati.

Trenje je sila, ki ima v našem življenju zelo pomembno vlogo. Hodimo lahko le, kadar je trenje med tlemi in našimi podplati dovolj veliko, da nam omogoča od-riv. Po drugi strani pa je ugodno, da je pri gibanju trenje v naših sklepih čim manjše, kar dosežemo s primernim mazanjem. Z mazanjem poskušamo tudi zmanjšati trenje med deli avtomobilskega motorja. Porabo goriva pri vožnji lahko zmanjšamo tudi s primerno izbiro avtomobilskih gum. Te naj bi povzročale čim manjše trenje pri enakomerni vožnji naravnost in veliko trenje v ovinkih ter pri zaviranju in pospeševanju. Tudi oblika avtomobila vpliva na silo trenja, ki jo moramo pre-magovati pri vožnji. Trenje med različno hitro gibajočimi se plastmi zraka ob avtu povzroči namreč silo, ki se upira gibanju. To je upor sredstva. Zaradi njega sploh lahko skačemo s padali. Brez trenja bi nam izpadli nohti, žebli bi bili neuporabni, niti bi izpadle iz šivov naših oblek in vožnja s kolesom bi se spremenila v brezupen poskus.

Da bi razumeli nastanek sile trenja, naredimo poskus. Napolnimo škatlo s knji-gami. Oprimo se vanjo in jo poskusimo potisniti po tleh. Kaj opazimo? Dokler je naša sila majhna, se škatla ne premakne. Kot da bi bila trdno sprijeta s podlago, se nam upira z reakcijsko silo, ki je po velikosti vedno natančno enaka naši sili. To je **sila lepenja** ali statičnega trenja. Trenje med dvema površinama, ki mirujeta, na-mreč imenujemo **lepenje**. Lepenje izgovarjamo kot lepênje, podobno kot lebdenje ali sedenje. Ta beseda je nerodno podobna lepljenju in paziti moramo, da teh dveh pojmov ne zamenjujemo.

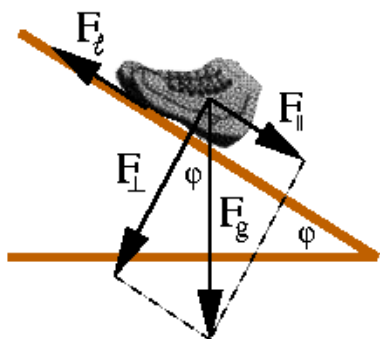
Povečujemo sedaj silo na škatlo. Opazimo, da se škatla končno premakne. Trenje med dvema površinama se nam seveda ne more upirati s poljubno veliko silo. Ko naša sila preseže največjo možno silo lepenja, se škatla premakne in začne dr-seti po podlagi. Pri tem se nam še vedno upira – s **silo trenja**. To je sila, ki nastane, kadar dve površini drsita druga po drugi.

Če želimo, da se bo škatla gibala enakomerno, moramo seveda najo delovati s silo, ki bo po velikosti ravno enaka sili trenja.

8.1 Lepenje

Od česa je torej odvisna največja sila lepenja?

Naredimo še en poskus. Odvzemimo nekaj knjig iz naše testne škatle. Opa-zimo, da jo sedaj lažje premaknemo – največja sila lepenja se je torej zmanjšala. Naša prva misel bi bila lahko, da je lepenje odvisno od mase predmeta. A nas kra-tek razmislek prepriča o nasprotnem. Predstavljajmo si, da smo v vesoljski ladji, kjer naša škatla s knjigami brez teže lebdi nad tlemi. Kolikšna je sila lepenja med škatlo in podlago? Sploh je ni, saj se škatla niti ne dotika podlage. Iz tega sklepamo, da mora biti največja sila lepenja odvisna od sile, ki pritiska škatlo na podlago. Ka-dar škatlo potiskamo po vodoravni podlagi, je ta sila kar teža škatle. Dvignimo sedaj škatlo in jo pritisnimo ob steno. Če je sila, ki pritiska pravokotno na steno,



Slika 8.2: Težo predmeta na klancu (F_g) smo razstavili na dve med seboj pravokotni komponenti $F_{\parallel}$ in $F_{\perp}$. Telo miruje, dokler je sila $F_{\parallel}$ nasprotno enaka sili lepenja F_{ℓ} .

dovolj velika, škatla ne bo zdrsela. Ko silo zmanjšamo, postane sila lepenja manjša od teže škatle in ta zdrsne ob steni na tla.

Postavimo sedaj škatlo na tla in jo obrnimo tako, da stoji na manjši ploskvi. Presenečeno ugotovimo, da se pri tem sila lepenja prav nič ne spremeni. In res tudi natančne meritve pokažejo, da največja sila lepenja ni nič odvisna od velikosti stične ploskve.

Iz vsega tega sklepamo, da je **največja sila lepenja odvisna od vrste obeh stičnih ploskev in od sile, ki ti dve ploskvi pritiska drugo ob drugo**. To je sila, ki je pravokotna na obe ploskvi in jo zato označimo kot $F_{\perp}$. Če lastnosti obeh ploskev popišemo s količnikom lepenja (k_{ℓ}), je največja sila lepenja (F_{ℓ}):

$$F_{\ell} = k_{\ell} F_{\perp} \quad (8.1)$$

Nekaj količnikov lepenja je podanih v tabeli 8.1. Vidimo, da ti po navadi niso večji od 1 in so le redko manjši od 0,4. Majhni so predvsem tedaj, kadar ploskvi nista v neposrednem stiku, ampak je vmes tanka plast tekočine. V strojništvu je to navadno tanek sloj masti ali olja, v naših sklepih sinovialna tekočina, na ledu pa površinska plast vode.

Kako bi lahko izmerili količnik lepenja? Ogledali si bomo preprost poskus, ki ga lahko tudi sami naredite doma. Vzemimo čevlji in ga postavimo na desko. Desko na enem koncu počasi dvigamo toliko časa, dokler čevlji ne zdrsne. Vprašajmo se, zakaj je zdrsnil? In, ali bi zdrsnil prej ali pozneje, če bi bil čevlji težji – na primer, če bi mi stali v njem?

Oglejmo si sliko 8.2. Narisan je **diagram prostega telesa** za čevlji na klancu. To je diagram, kjer si predstavljamo, da opazovano telo prosto lebdi v prostoru, nanj pa delujejo zunanje sile. Te so v našem primeru teža čevlja, ki deluje navpično navzdol, in sila lepenja, ki preprečuje gibanje po klancu. Ta deluje na stiku čevlja s podlago v smeri po strmini navzgor. Težo čevlja (F_g) razstavimo na dve

komponenti: silo, ki pritiska pravokotno na podlago ($F_{\perp}$), in tisto, ki je vzporedna s klancem ($F_{\parallel}$).

Kot vidimo iz slike, sta velikosti teh dveh sil odvisni od strmine klanca, ki jo podaja kot φ :

$$F_{\parallel} = F_g \sin \varphi, \quad F_{\perp} = F_g \cos \varphi. \quad (8.2)$$

Sila $F_{\parallel}$ poskuša premakniti čevlji po klancu navzdol. Vendar ji nasprotuje sila lepenja. Vidimo, da se z večanjem kota φ povečuje tudi sila, vzporedna s klancem. In ko ta preseže največnjo možno vrednost sile lepenja (F_{ℓ}), čevlji zdrsne.

Izmerimo torej kot φ , pri katerem začne čevlji drseti. Tedaj je vzporedna sila po velikosti ravno enaka največji sili lepenja:

$$F_{\parallel} = F_{\ell} = k_{\ell} F_{\perp}. \quad (8.3)$$

Uporabimo še enačbo 8.2 in dobimo:

$$F_g \sin \varphi = k_{\ell} F_g \cos \varphi. \quad (8.4)$$

Iz te zveze lahko takoj določimo količnik lepenja kot

$$k_{\ell} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (8.5)$$

Če na primer izmerimo, da čevlji zdrsne pri kotu $\varphi = 45^\circ$, nam da enačba 8.5 takoj vrednost količnika lepenja $k_{\ell} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Pogled v tabelo 8.1 pa nam pokaže še, da bi približno pri takem kotu zdrsnili tudi čevlji z gumijastim podplatom na suhi betonski podlagi.

Ampak, boste pomislili, izmerili smo vendar drsenje samega čevlja, ki je zelo lahek. Kaj pa, če mi stojimo v njem? Tedaj na podlago pritiskamo z večjo silo in zato je tudi največja sila lepenja večja. Ali bomo zato lahko hodili po večji strmini? Ne! Enačba 8.5 je neodvisna od teže. Če se pritisk na podlago poveča, se res poveča tudi največja možna sila lepenja. Prav toliko se poveča tudi komponenta sile teže, vzporedna s klancem, ki povzroča drsenje.

8.2 Trenje

Potrebujemo precejšnjo silo, da škatlo premaknemo, nato pa najbrž zadostuje že manjša sila, da škatlo enakomerno premikamo. Sila lepenja je namreč po navadi večja od sile trenja. Ko škatlo nekaj časa premikamo, opazimo, da je trenje odvisno od vrste tal, bolj so gladka, manjša je sila trenja. Pravzaprav ni odvisna samo od vrste podlage, ampak od lastnosti obeh površin, ki se dotikata pri drsenju.

Podobno kot pri sili lepenja ugorovimo, da je tudi **sila trenja odvisna od vrste obeh drsnih ploskev in od sile, ki ti dve ploskvi pritiska drugo ob drugo**. To je

Tabela 8.1: Približne vrednosti nekaterih količnikov lepenja in trenja

Vrsta drsnih ploskev	Količnik lepenja (v mirovanju)	Količnik trenja (pri gibanju)
jeklo – jeklo	0,74	0,57
steklo – steklo	0,94	0,40
guma – beton (suh)	1,0	0,8
guma – beton (moker)	0,30	0,25
les – les	0,4	0,2
led – led	0,1	0,03
sklepi s sinovialno tekočino	0,01	0,01

sila, ki je pravokotna na obe ploskvi in jo zato označimo kot $F_{\perp}$. Če lastnosti obeh ploskev popišemo s količnikom trenja (k_t), je sila trenja (F_t):

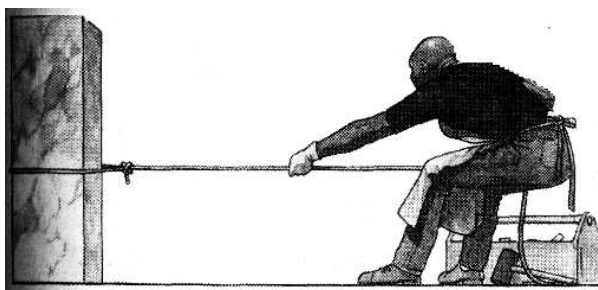
$$F_t = k_t F_{\perp} \quad (8.6)$$

Kot vidimo iz tabele 8.1, ki podaja količnike lepenja in trenja za nekaj različnih podlag, je slednji res za drsenje po trdni podlagi večinoma manjši od količnika lepenja.

In še opozorilo. Sila trenja (F_t) vedno nasprotuje drsenju po podlagi. Njena smer je zato vzdolž podlage, v obratni smeri, kot se telo giblje. $F_{\perp}$ pa je sila pravokotno na podlago. Ti dve sili sta zato med seboj vedno pravokotni. Enačba 8.6 zato ni vektorska enačba, ampak prikazuje le zvezo med velikostima sil.

8.3 Nekaj praktičnih primerov

Ogledali si bomo nekaj praktičnih primerov uporabe biomehanske analize. Analizo začnemo tako, da poskušamo razumeti dano situacijo. Vprašamo se, kaj se dogaja, kakšne so lastnosti prisotnih snovi in ali smo že kdaj videli podoben primer. Premislimo tudi, kaj bi se zgodilo, če bi bistveno spremenili dane pogoje. Nato narišemo **diagram prostega telesa**. Pri tem si predstavljamo, da opazovano telo prosto lebdi v prostoru, nanj pa delujejo zunanje sile. Narišemo jih. Pomembno je, da narišemo res vse sile, ki delujejo na telo. In da ne narišemo nobene sile, s katero deluje telo na okolico ali na svoj del. Nato napišemo pogoja za ravnovesje: vektorska vsota vseh sil in navorov mora biti enaka nič in izračunamo velikosti posameznih sil.



Slika 8.3: Mojster poskuša premakniti težak kamen. Kakšne sile delujejo nanj?

8.3.1 Premikanje težkih predmetov

Kamnosek na sliki 8.3 je privezal vrv na težak kamnit blok in ga poskuša premakniti. Oglejmo si sliko in ugotovimo, ali razumemo dogajanje. V katero smer vleče kamnosek? Kaj bi se zgodilo na zelo gladkih tleh in kaj, če bi se vrv pretrgala?

Ugotovimo sedaj, katere sile delujejo na mojstra. Prav gotovo ga privlači Zemlja s silo teže. Tej nasprotuje reakcijska sila tal. Kamen deluje na kamnoseka z reakcijsko silo in tla s silo lepenja.

Te sile narišemo na sliko. Ker je smer vrvi vodoravna, je slika zelo preprosta. Kot vidimo na sliki 8.4, sta sili F_k in F_ℓ vodoravni ter F_g in F_R navpični. Ker mora biti za ravnovesje vsota navpičnih sil nič, je torej reakcijska sila tal (F_R) vedno nasprotno enaka teži mojstra (F_g). Ravnovesje vodoravnih sil pa nam pove, da je reakcijska sila kamna (F_k) tudi nasprotno enaka sili lepenja (F_ℓ). Kdaj mojster zdrsne? Ko sila F_k preseže največjo silo lepenja. Ta pa je odvisna od pravokotne sile na podlago, F_R torej. In ta sila je vedno kar enaka sili teže, neodvisno od tega, kje ima mojster noge. Tako ugotovimo, da za zdrs nog položaj telesa sploh ni pomemben. Ker pa vemo tudi, da je sila lepenja neodvisna od velikosti stične ploskve, nam postane jasno, da je za zdrs prav vseeno, če mojster obremeni eno nogo ali pa obe.

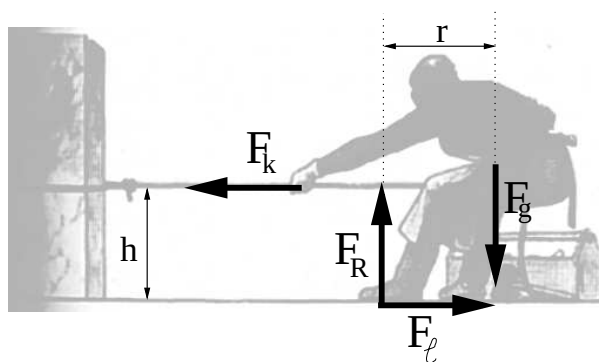
Napišimo še pogoj za ravnovesje navorov. Za os vrtenja izberemo stik med podplati in tlemi. Dobimo:

$$F_k h - F_g r = 0,$$

kar nam da

$$F_k = F_g \frac{r}{h}.$$

Kaj to pomeni? Če je vrv v višini h od tal, potem je sila, s katero mojster vleče kamen, odvisna le od mojstrove teže in razdalje med težiščem in podplati. Čim bolj se nagne nazaj, z večjo silo vleče. Na naši sliki je razdalja h kar približno enaka r



Slika 8.4: Diagram prostega telesa za primer, prikazan na sliki 8.3

in zato lahko takoj ugotovimo, da mojster vleče kamen s silo, ki je približno enaka njegovi teži.

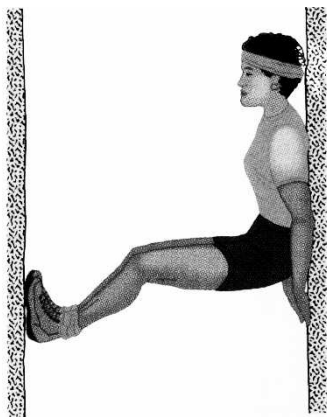
Ali lahko kamnosek to silo poveča? Odgovor je pritrdilen. Lahko, le noge mora postaviti bližje kamnu, ali pa se bolj nagniti nazaj. Kaj pa se zgodi, če mojster poskuša z rokami močnejše potegniti za vrv. Večja sila F_k pomeni, da ne bo več ravnovesja in mojstrov telo se bo premaknilo naprej, proti kamnu. Toda v tem položaju bo lahko sila F_k le še manjša kot prej.

Vidimo, da je tak način premikanja kamna zelo nespretno izbran. Mojster na sliki očitno ni poseben mojster za premikanje kamnov. Kamen vleče le s svojo težo in sila mišic pri tem nič ne pomaga.

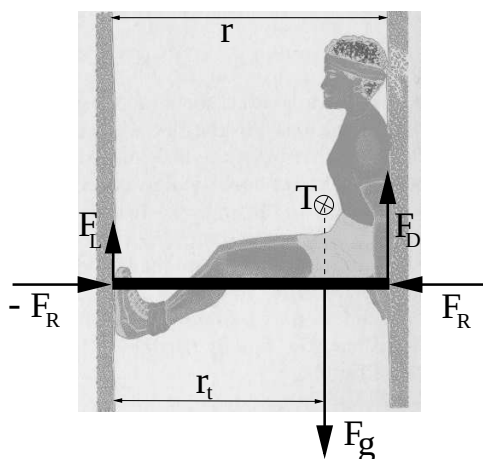
In ne samo to. Pomislimo, kaj se bo zgodilo, če bo mojster končno le uspel premakniti kamen. Ko bo sila F_k presegla največjo silo lepenja kamna, se bo ta premaknil proti desni in tudi mojster z njim. Povečala se bo razdalja r in s tem tudi vlečna sila mojstra. Bolj kot se bo kamen premikal, bolj bo naraščala vlečna sila. Stvar se očitno ne more dobro končati. Če pa se spomnimo, da je sila trenja po navadi manjša od največje sile lepenja, nam postane jasno, da bo mojster vleko končal sede na tleh.

8.3.2 Biomehanika plezanja kamina

Oglejmo si sliko 8.5. Malo širšo razpoko v skalah imenujemo kamin. In tega je mogoče preplezati tako, da se opiramo med obe steni. Bolj kot je skala gladka, z večjo silo moramo pritiskati pravokotno na steno kamina, da ne zdrsnemo. Ali je pravokotna sila na levo in desno steno lahko različna? Seveda ne. Ker plezalka na sliki miruje, sklepamo, da je vsota vseh sil, ki nanjo delujejo, enaka nič. V vodoravni smeri delujeta nanjo reakcijski sili leve in desne stene. In ti dve morata



Slika 8.5: Kamin lahko preplezamo tako, da se opiramo med obe steni.



Slika 8.6: Diagram prostega telesa za plezalko v kaminu, kot je prikazana na sliki 8.5. T je težišče telesa, F_g sila teže, F_R reakcijska sila stene, F_L in F_D pa sta sili lepenja obeh sten.

biti nasprotno enaki. Bolj kot plezalka poskuša pritisniti na desno steno, bolj tudi pritiska na levo. Na plezalko deluje tudi sila teže, njej pa nasprotujeta sili lepenja med obema stenama. In kadar je njuna vsota enaka teži plezalke, ta v narisanim položaju miruje. Če zmanjša silo na steni kamina, se tudi največja možna sila lepenja zmanjša. Ko postane vsota obeh sil lepenja manjša od sile teže, začne plezalka drseti navzdol. To pa je sedaj dinamičen primer. Količnik trenja je navadno manjši od količnika lepenja, zato mora plezalka, ko začne drseti, uporabiti večjo silo, da se ustavi, kot jo je potrebovala v mirovanju. Vsako drsenje je zato težko ustaviti.

Narišimo sedaj diagram prostega telesa plezalke v kaminu (slika 8.6). Predstavljamo si, da opazovano telo prosto lebdi v prostoru, nanj pa delujejo zunanje sile. Te so v našem primeru: teža (F_g), reakcijski sili obeh sten (F_R) in obe sili lepenja (F_L in F_D). S črko T smo označili težišča telesa. Diagram prostega telesa nam bo pomagal, da bomo razumeli sile, ki delujejo na telo. Odgovorili bomo lahko na različna vprašanja o ravnovesju, kot na primer s kolikšno silo mora plezalka pritiskati na stene kamina, da ne zdrsne, in kaj zdrsne prej – trup ali noge.

Če poznamo maso (m) plezalke, lahko njeno težo izračunamo kot $F_g = mg$, kjer je g težnostni pospešek. Ta sila deluje navpično navzdol, njej pa nasprotujeta sili lepenja F_L in F_D . Da plezalka miruje, mora biti vsota vseh sil, ki nanjo delujejo, enaka nič. Zato mora biti nič tudi vsota sil, ki delujejo v vodoravni smeri, in tudi

tistih, ki so navpične. Diagram prostega telesa na sliki 8.6 nam pokaže, da sta vodoravni sili le dve reakcijski sili stene. Njuna vsota bo nič samo, če bosta ti dve sili enaki po velikosti, a nasprotno usmerjeni. Zato smo ju na sliki že označili kot F_R in $-F_R$. Navpične sile pa so tri: F_g , F_L in F_D . Pogoj za ravnovesje teh sil zapišemo kot:

$$F_g + F_L + F_D = 0,$$

ali še drugače

$$F_L + F_D = -F_g.$$

Vsota sil F_L in F_D mora biti torej enaka teži plezalke.

Kot smo videli na strani 61, mora biti za ravnovesje tudi vsota vseh navorov enaka nič. Napišimo vsoto navorov glede na os vrtenja okoli nog plezalke. Tu delujeta le dva navora: navor teže in navor desne sile lepenja. Zato je

$$F_g r_t - F_D r = 0.$$

r_t je razdalja težišča od leve stene, r pa širina kamina, kot je označeno na sliki 8.6. Iz tega dobimo:

$$F_D = F_g \frac{r_t}{r}.$$

Če vstavimo to zvezo v pogoj za ravnovesje sil, lahko izračunamo tudi levo silo:

$$F_L = F_g \frac{r - r_t}{r}.$$

Na sliki vidimo, da je $r - r_t$ kar oddaljenost težišča telesa od desne stene. Ker je na sliki težišče bližje desni steni, je tudi r_t večje od $r - r_t$ in mora biti zato tudi desna sila lepenja (F_D) večja od leve. Vendar pa je lahko sila lepenja največ enaka pravokotni sili na podlago, pomnoženi s količnikom lepenja. Zato je

$$F_D \leq k_\ell F_R.$$

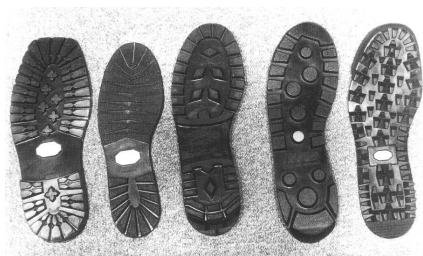
Da v narisanim položaju plezalka miruje, mora torej pritiskati na steno s silo, ki je večja kot $\frac{F_D}{k_\ell}$. Če uporabimo še izraz za velikost desne sile, dobimo:

$$F_R \geq \frac{F_g}{k_\ell} \cdot \frac{r_t}{r}.$$

Če plezalka zmanjša pritisk na steno (F_R), sila lepenja ne more biti več enaka sili F_D in telo plezalke ne more več mirovati. Plezalka zdrsne. In če količnik lepenja med steno in podplati čevljev ni bistveno manjši od količnika lepenja med obleko in steno, plezalka najprej zdrsne na desni strani, torej na strani, ki je bližje težišču njenega telesa.

Kaj pa, če se širina kamina zmanjša? Plezalka mora seveda v ožjem kaminu noge bolj skriti in zato se njeno težišče premakne proti sredini kamina. Razmerje $\frac{r_t}{r}$ se zato zmanjša in s tem tudi potrebna sila na steni kamina.

8.4 O podplatih pohodnih in plezalnih čevljev



Ko gledamo danes v trgovinah množico različnih modelov pohodnih in plezalnih čevljev, le redko pomislimo, da so še pred dobrimi petdesetimi leti veljali z žebli okovani usnjeni gojzarji za vrhunec tehnike. Šele leta 1935 je Italijan Vito Bramani prišel na genialno idejo, da bi za podplat gorskih čevljev uporabil sintetično gumo. Da guma na mokri podlagi ne bi drsela, je izdelal podplat v obliki različnih vzorcev. Vodo ali blato pri koraku stisnemo v zareze podplata, guma pa pride v stik s trdno podlago skale ali poti. Sila lepenja je pri tako narejenih podplatih večja in hoja varnejša. Še danes veljajo za najkvalitetnejše prav originalni Vibram podplati, ki svoje ime dolgujejo izumitelju.

Le nekaj sodobnih podplatov je prikazanih na sliki. Izdelani so lahko iz različnih materialov, od zelo trdega in odpornega neoprena, pa do mehke gume. Mehki podplati se uporabljajo predvsem za plezanje po skalah, kjer je pomembno, da se prilagodijo vsaki še tako majhni izboklinici ali razpoki na skalnih površinah. Zato so podplati plezalnih čevljev po navadi povsem gladki. Za lažje plezanje in hojo se uporabljajo čevlji z mehkim podplatom in ne prav izrazitim vzorcem podplata. Mehke podplate so razvili tudi za pohodne čevlje, ker ti manj uničujejo občutljivo gorsko naravo. Za hojo po snegu in ledu pa

uporabljamo trše podplate z globljimi zarezami. V splošnem velja, da za težji in bolj razdrapan teren uporabljamo podplate z bolj izrazitimi in globljimi vzorci.

Vendar pa podplat pohodnih čevljev ni samo spodnja gumijasta poloskev. Po navadi sploh ne opazimo notranjega in srednjega dela podplata. Notranji del podplata je tisti, ki ga pri hoji najbolj čutimo. Oblikovan naj bi bil po obliki noge in dovolj mehak, da ublaži silo pri koraku. Nekateri lahki pohodni čevlji imajo notranji podplat izmenljiv – lahko ga zamenjamo, ko postane trd ali izrabljen. Pa še ponoči ga lahko vzamemo iz čevlja in posušimo. Podobno kot pri športnih copatih, je tudi pri pohodnih čevljih razvoj sodobne tehnologije najbolj vplival na srednji del podplata. Ta skrbi za trdnost čevlja in naj bi hkrati s svojo elastičnostjo povečal čas zaviranja in s tem sile pri vsakem koraku. Po navadi dele srednjega podplata ojačijo s tršim plastičnim materialom, predvsem peto ali sprednji del. Skratka, današnji pohodni čevlji so po zasnovi zelo podobni tekaškim – bili naj bi lahki in hkrati čim bolj odporni.

Obstaja pa še ena vrsta gorskih čevljev. Za bolj zahtevne ture uporabljamo trše čevlje. Ti imajo navadno podplat ojačan s kovinsko ploščo ali drugim trdnim materialom. Ojačitev je lahko le na zadnji polovici podplata in skrbi za oporo stopalnega loka ter za to, da se podplat lahko pregiba le tam, kjer se pregiba stopalo. Še trše podplate pa uporabljamo za čevlje, na katere želimo pritrditi dereze. Zgornji del takih čevljev je navadno narejen iz plastike ali trdega usnja in nudi nogi tudi večjo prečno oporo.

8.5 Povzetek

- Sila lepenja (F_ℓ) je sila trenja v mirovanju in je odvisna od vrste obeh drsnih ploskev (k_ℓ) ter od sile ($F_\perp$), ki ti dve ploskvi pritiska drugo ob drugo:

$$F_\ell = k_\ell F_\perp.$$

- Sila trenja pri drsenju (F_t) je odvisna od vrste obeh drsnih ploskev (k_t) in od sile ($F_\perp$), ki ti dve ploskvi pritiska drugo ob drugo:

$$F_t = k_t F_\perp.$$

8.6 Vprašanja

1. Natakar potisne proti gostu po točilni mizi poln vrček piva. Vrček zapusti roko s hitrostjo 2,8 m/s in se na razdalji 1,5 m ustavi. Kolikšna je sila trenja med vrčkom in točilno mizo, če je masa vrčka 0,6 kg?
2. V prospektu za plezalne čevlje piše, da je podplat popolnoma gladek zato, da je stična površina med čevljem in skalo čim večja – zato je pri takih podplatih tudi trenje največje. Kaj meniš o tem?
3. Za hojo po gladki podlagi najdemo v literaturi priporočilo, da naj stopamo na cel podplat. S tem naj bi povečali stično površino med telesom in tlemi ter zato tudi trenje. Kaj meniš o tem?
4. Ugotovi, katere mišice so najbolj obremenjene, kadar plezalka miruje v položaju, ki je prikazan na sliki 8.5. Katero silo povzročajo?

9

DELO IN ENERGIJA



Slika 9.1: Test stopanja je preprost način ocenjevanja aerobne zmogljivosti (VO_2max). Osebo za določen čas obremenimo na standarden način in nato izmerimo njen srčni utrip. Pri Queens College testnem postopku stopa oseba na 40 cm visoko stopnico s frekvenco 24 min^{-1} (moški) ali 22 min^{-1} (ženske). Po treh minutah izmerimo frekvenco srčnega utripa in iz nje ocenimo VO_2max ($\text{ml min}^{-1}\text{kg}^{-1}$).

9.1 Delo

Pri Queens College testnem postopku stopa oseba tri minute na 40 cm visoko stopnico (slika 9.1). To opravilo zahteva od preiskovanca določen napor, kar se pokaže z višjo frekvenco srčnega utripa.

Najprej se bomo vprašali, kolikšno delo opravi preiskovanec pri takem testiranju. Poskušali bomo ugotoviti, od česa je to delo odvisno in kako ga lahko izračunamo.

Oglejmo si en sam korak. Premislimo, kaj bi bilo, če bi se čudežno nenadoma zmanjšala teža preiskovanca. Prav gotovo bi tedaj v vsakem koraku opravil manj dela. Opravljeno delo je torej sorazmerno teži preiskovanca. Iz tega lahko sklepamo, da je delo sorazmerno sili, ki jo moramo premagovati. Kaj pa, če bi zmanjšali višino stopnice? Tudi v tem primeru bi preiskovanec v vsakem koraku opravil manj dela. Vidimo torej, da je delo odvisno tudi od razdalje, na kateri premagujemo silo.

To spoznanje lahko zapišemo z enačbo kot:

$$A = F \cdot s,$$

kjer je F sila, ki jo premagujemo na poti s .

To velja, kadar je sila, ki jo premagujemo na poti konstantna. Če pa se sila na poti spreminja, lahko delo izračunamo za vsak majhen košček poti (ds) kot:

$$dA = Fds. \quad (9.1)$$

Celotno opravljeno delo je tako vsota (integral) vseh majhnih prispevkov:

$$A = \int Fds. \quad (9.2)$$

V našem primeru se je preiskovanec premikal navzgor in pri tem premagoval silo teže, ki je delovala navzdol. Kaj pa, če sila ne deluje v smeri premika? V tem primeru moramo na poti s premagovati manjšo silo – le komponento sile v smeri premika ($F_{\parallel}$):

$$A = F_{\parallel} \cdot s = F \cdot \cos \varphi \cdot s,$$

kjer je φ kot med smerjo sile in premika.

Ker sta sila in premik vektorja, lahko torej delo konstantne sile zapišemo kot skalarni produkt sile in poti:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi. \quad (9.3)$$

Tu smo označili vektorja kot $\vec{F}$ in $\vec{s}$, F in s pa sta njuni velikosti. Ta izraz za delo pa lahko razumemo še drugače. Opazimo, da je $s \cdot \cos \varphi$ premik v smeri sile in je zato opravljeno delo tudi enako sili, pomnoženi s premikom v njeni smeri.

Enota za delo je Nm. To enoto imenujemo joule (izg. džul, po angleškem fiziku iz 19. stoletja, Jamesu Prescottu Joulu) in jo okrajšamo J.

Oglejmo si nekaj primerov.

Primer 9.33

Oseba z maso 60 kg stopi navpično navzgor na 40 cm visoko stopnico (slika 9.1). Kolikšno delo opravi pri tem?

Sila, ki jo premaga, je njena teža:

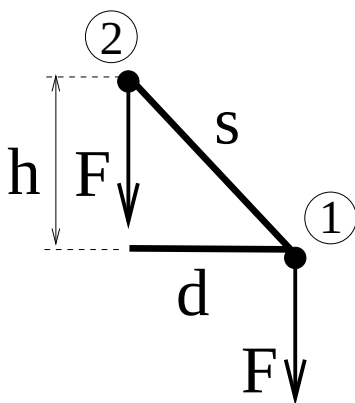
$$F = m \cdot a = 60 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} = 600 \text{ N}.$$

Sila deluje navzdol, torej v smeri nasprotni njenemu premiku.

Če se je dvignila za višino $s = 40 \text{ cm}$, je pri tem opravila delo:

$$A = 600 \text{ N} \cdot 0,40 \text{ m} = 240 \text{ Nm} = 240 \text{ J}.$$

...



Slika 9.2: Pri premiku težišča od točke 1 do točke 2 opravimo pot s (glej primer 9.33)

Primer 9.34

Kaj pa, če preiskovankin začetni položaj ni tik ob stopnici, ampak stoji npr. 30 cm oddaljena od nje (slika 9.2)? Tedaj pri enem koraku opravi daljšo pot

$$s = \sqrt{d^2 + h^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ cm} = 50 \text{ cm},$$

ampak zato na tej poti premaguje tudi manjšo silo. Kot med premikom in silo lahko izračunamo kot:

$$\operatorname{tg} \Phi = d/h = 30/40 = 0,75.$$

Zato je $\Phi = 36.87^\circ$ in komponenta sile v smeri premika je

$$F_{\parallel} = F \cdot \cos \varphi = 600 \text{ N} \cdot \cos 36,87^\circ = 480 \text{ N},$$

Kar nam da za delo

$$A = 480 \text{ N} \cdot 0,50 \text{ m} = 240 \text{ J}.$$

Rezultat je popolnoma enak, kot v prejšnjem primeru – do majhne razlike lahko pride le zaradi napak pri zaokroževanju rezultatov.

Seveda! Premik v smeri sile pa je še vedno 40 cm, zato pri tem opravi enako delo, kot v prejšnjem primeru, ko je stopala naravnost navzgor.

• • •

Primer 9.35

Po vodoravnih lesenih tleh potiskamo z enakomerno hitrostjo omaro z maso 30 kg 10 m daleč. Izračunajmo, kolikšno delo smo opravili pri tem.

Takoj ugotovimo, da pri tem opraviu premagujemo silo trenja med omaro in tlemi in da ta sila deluje vedno v smeri, ki je nasprotna našemu gibanju. Iz tabele 8.1 na strani 123 ocenimo, da je količnik trenja v tem primeru 0,2. Zato je sila trenja:

$$F_t = k_t \cdot F_{\perp} = k_t \cdot m \cdot g,$$

saj je sila, ki deluje navpično na podlago $F_{\perp}$, kar enaka teži omare.

Če potiskamo omaro na razdalji s , potem opravimo delo:

$$A = F_t \cdot s = k_t \cdot m \cdot g \cdot s = 0,2 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot 10 \text{ m} = 600 \text{ J}.$$

• • •

9.2 Potencialna energija

Videli smo, da s stališča mehanike opravimo popolnoma enako delo, če dvignemo telo za določeno višino, neodvisno od poti, po kateri smo tja prišli. Če označimo višino s črko h in je sila teže, ki jo moramo premagati, $m \cdot g$, pri tem opravimo delo:

$$A = mgh.$$

Količino mgh imenujemo težnostna potencialna energija:

$$E_p = mgh. \quad (9.4)$$

Če torej dvignemo predmet za določeno višino, pri tem premagujemo silo teže in tako opravimo delo. S tem smo povečali potencialno energijo za prav toliko, kot smo opravili dela. To energijo lahko predmet tudi odda – če ga na primer spustimo, da pade za višino h .

9.3 Kinetična energija

Kot smo videli v poglavju 7, se vsi predmeti upirajo vsaki spremembi hitrosti z določeno silo, ki je kar enaka ma . Če hočemo gibajoči se predmet ustaviti, moramo torej nanj delovati s silo, prav tako pa potrebujemo silo, da predmet pospešimo. Zato pravimo, da ima gibajoči predmet kinetično energijo, ki je odvisna od njegove hitrosti:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (9.5)$$

V tej enačbi je m masa predmeta, ki se giblje s hitrostjo v .

9.4 Delo in elastična energija

Vzemimo kos elastičnega materiala, ki je raztegnjen za dolžino x , kot smo obravnavali v poglavju 6.1. Dokler je raztezek majhen je sila sorazmerna raztezk (Hookov zakon). Na ta material mora zato delovati sila $F = kx$. Če se raztezek ne spreminja, ta sila ne opravlja nobenega dela. Kadar pa raztezek malo povečamo, npr. za dx , pa opravimo delo:

$$dA = Fdx = kx dx. \quad (9.6)$$

Delo, ki ga opravimo, če elastično snov raztegnemo za dolžino ℓ , pa dobimo kot

$$A = \int_0^{\ell} kx dx = \frac{1}{2}k\ell^2. \quad (9.7)$$

Če smo opravili določeno delo za raztezanje elastične snovi, smo s tem ravno za toliko povečali energijo tej snovi. Elastična energija snovi, raztegnjene za ℓ , je torej enaka $\frac{1}{2}k\ell^2$.

9.5 Ohranitev energije

Energija je ena od količin, ki se pri pojavih v vsakdanjem svetu ohranjajo. Seveda pa se lahko energija spreminja iz ene oblike v drugo. V atomskem svetu in pri zelo velikih hitrostih pa moramo upoštevati še, da se lahko energija spreminja v maso in obratno.

Oglejmo si primer. Ko primem 0,5 kg težko knjigo in jo dvignem 1 m nad mizo, opravi delo ($0,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot 1 \text{ m} = 5 \text{ J}$). Pri tem porabim 5 J kemijske energije, ki sem jo dobil v svoje telo s hrano, in povečam potencialno energijo prav tako za 5 J. Ko knjigo spustim, začne padati in njena hitrost se enakomerno povečuje. Ko pade nazaj na mizo, tj. 1 m daleč, je njena kinetična energija enaka prejeti potencialni energiji, tj. 5 J. Ker je kinetična energija $\frac{1}{2}mv^2$, lahko takoj ugotovimo, da je tedaj hitrost knjige $v = \sqrt{2E_k/m} = \sqrt{2 \cdot 5 \text{ J}/0,5 \text{ kg}} = 4,5 \text{ m/s}$.

Že dolgo vemo, da naprave, ki bi iz nič ustvarjale energijo, ni mogoče zgraditi, vendar se še vedno občasno pojavljajo ideje in patenti za različne take naprave – prepetuum mobile.

9.6 Moč

Oglejmo si še enkrat test stopanja, s katerim smo začeli to poglavje. V podpoglavju 9.1 smo se naučili izračunati delo, ki ga preiskovanec opravi v enem koraku. Celotno delo pa dobimo preprosto tako, da pomnožimo delo enega koraka s celotnim številom korakov. Za to delo porabljena energija je seveda enaka delu. Ker pa v našem telesu uporabljamo predvsem kemijsko energijo, ki jo pridobivamo iz sestavin hrane z vezavo kisika, je tudi količina porabljenega kisika sorazmerna opravljenemu delu.

Iz izkušnje vemo, da ni vseeno, ali delo opravljamo hitro ali počasi. Fizikalno definiramo moč kot hitrost opravljanja dela. Če delo opravljamo enakomerno, potem moč (P) preprosto izračunamo tako, da delo (A) delimo s časom (t):

$$P = \frac{A}{t} \quad (9.8)$$

Če pa dela ne opravljamo enakomerno, potem ta definicija podaja povprečno moč. Moč merimo v wattih, kjer je $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

V splošnem primeru, ko se opravljeno delo spreminja enakomerno s časom, pa lahko trenutno moč izračunamo kot odvod dela po času:

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (9.9)$$

Sedaj že vemo, da tisto, kar nas zanima pri testiranju preiskovancev, ni delo, ampak hitrost opravljanja dela – moč. Z večjo močjo delamo, več dela opravimo v določenem času in zato porabimo več kisika na časovno enoto. Zato se poveča frekvenca srčnega utripa (tj. število utripov v časovni enoti) in s tem tudi občutek napora. Meritve so pokazale, da je frekvenca srčnega utripa po navadi res kar sorazmerna porabi kisika na časovno enoto in s tem moči delovanja. Temu pogosto tudi sledi lasten občutek napora.

Kako torej izračunamo moč pri testu stopanja? Ker poznamo delo opravljeno pri enem koraku (A) in čas, porabljen zanj (T), je račun enostaven:

$$P = \frac{A}{T} = A\nu, \quad (9.10)$$

kjer je frekvenca (ν) kar število korakov v časovni enoti:

$$P = mgh\nu. \quad (9.11)$$

Preiskovanka iz prvega primera je stopala na stopnico s frekvenco 22/min, kar $22/60 \text{ s}^{-1}$, torej je delala z močjo

$$P = 240 \text{ J} \cdot 22/60 \text{ s} = 88 \text{ W}. \quad (9.12)$$

Podobno frekvenco srčnega utripa in porabo kisika bi dosegli tudi, če bi jo obremenili na kak drug način, vendar tako, da bi delala z močjo 88 W.

9.7 Povzetek

Delo (A) konstantne sile:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi,$$

kjer sta $\vec{F}$ in $\vec{s}$ vektorja, F in s pa njuni velikosti ter φ kot med njima.

Enota za delo je joule: $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-2}$.

Delo (A) splošno:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Težnostna potencialna energija (E_p):

$$E_p = mgh,$$

kjer je m masa predmeta, ki ga dvignemo za višino h in je g težnostni pospešek.

Enota za energijo je joule (J).

Kinetična energija (E_k):

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

kjer je m masa predmeta, ki se giblje s hitrostjo v .

Povprečno moč (P) izračunamo tako, da delo (A) delimo s časom (t), v katerem smo ga opravili:

$$P = \frac{A}{t}.$$

Enota za moč je watt: $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}$.

Trenutno moč (P) izračunamo kot odvod dela po času:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

9.8 Vprašanja

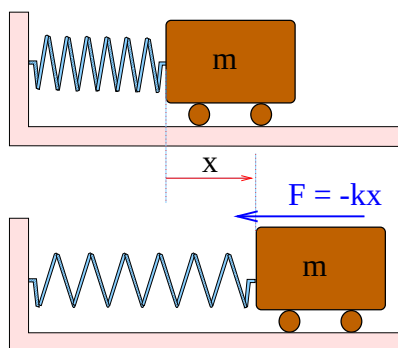
1. Na olimpijskih igrah leta 1976 je Vasili Alekseev dvignil 250-kilogramsko utež nad glavo (pribl. 2 m visoko). Izračunaj, kolikšno delo je opravil pri tem.
2. Izračunaj, kolikšna je bila v prejšnjem primeru potencialna energija dvignjene uteži.
3. Če je Vasili Alekseev dvignil utež s tal nad glavo v eni sekundi, kolikšna je bila njegova moč?
4. Ali je sprememba kinetične energije avtomobila večja, če se hitrost spremeni od 30 km/h do 40 km/h, kot če se hitrost poveča od 100 km/h do 110 km/h? Pojasni rezultat.
5. Za kolikokrat se zmanjša kinetična energija avtomobila, če se njegova hitrost zmanjša na polovico?
6. Masa avtomobila je stokrat manjša od mase lokomotive. Kolikokrat hitreje naj bi se gibal avto, da bi imel enako kinetično energijo kot lokomotiva?
7. Kos ledu z maso 2 kg zdrsne tri metre daleč po pobočju z naklonom 30° . Kolikšna je njegova končna hitrost, če je led v začetku miroval in če je trenje zanemarljivo?
8. Gradbeno dvigalo naj bi v eni minuti dvignilo betonski blok z maso 250 kg 30 m visoko. Kolikšna mora biti najmanj moč njegovega motorja? Zakaj mora biti dejanska moč večja od izračunane?
9. Prometni strokovnjaki trdijo, da uskladitev časov semaforjev, tako da poteka promet čim bolj enakomerno, prispeva k čistejšemu zraku v mestih. Ali je ta trditev smiselna? Zakaj?
10. Na potoku, kjer je pretok vode 100 litrov v sekundi, nameravamo zgraditi jez višine 2 metra in pod njim majhno elektrarno. Kolikšna bi bila največja mogoča moč take elektrarne, če ne bi bilo izgub? Kaj pa, če je izkoristek take elektrarne 5 %? Koliko električnih peči z močjo 1000 W bi lahko oskrbovala taka elektrarna?

10

NIHANJE



Slika 10.1: Nihanje je osnova mehanskih in tudi električnih ur. Prva je astronomska stolpna ura iz leta 1410, druga je iz okoli leta 1500 ter kaže posebej dnevne in nočne ure. Ročna ura na desni pa poleg časa in datuma prikazuje tudi nadmorsko višino, zračni tlak, temperaturo in še marsikaj.



Slika 10.2: Vzmetno nihalo predstavlja na vzmet pripeta masa, ki se brez trenja giblje po podlagi. Ko telo odmaknemo iz ravnovesne lege, deluje nanj vzmet s silo, ki je po smeri nasprotna odmiku.

10.1 Uvod

Nihanje je v naravi zelo pogost pojav. Niha predmet, ki ga obesimo na vrstico, utež na vzmeti, opna v zvočniku, struna na kitari in stene zgradbe, kadar pelje mimo težak tovornjak. Električno nihanje je osnova radijskih in televizijskih aparatov ter računalnikov. In vsi atomi v trdnih snoveh nihajo okoli svoje ravnovesne lege.

Napravo, ki niha, imenujemo nihalo. Če nihalo odmaknemo iz ravnovesne lege, začne nihati. Giblje se najprej proti ravnovesni legi in dalje v tej smeri, dokler se ne ustavi. Nato se prične gibati v nasprotno smer, gre skozi ravnovesno lego in naprej, dokler se ponovno ne ustavi. Pri tem opravi nihalo en nihaj. In vse se ponovi znova. Tako gibanje je posledica sile, ki poskuša vrniti nihalo v ravnovesno lego.

10.2 Vzmetno nihalo

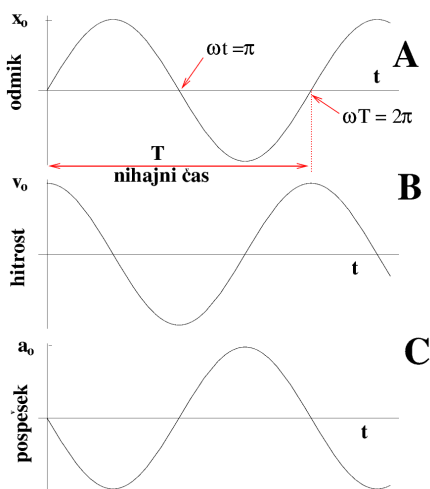
Na sliki 10.2 je prikazano preprosto vzmetno nihalo. Telo z maso m je pritrjeno na vodoravno vzmet. Predpostavimo še, da se telo lahko giblje brez trenja po podlagi ter da je masa vzmeti zanemarljivo majhna.

Kadar telo odmaknemo iz ravnovesne lege, deluje nanj sila vzmeti, ki ga poskuša vrniti v ravnovesje. Dokler so ti odmiki majhni, je sila vzmeti kar sorazmerna odmiku (Hookov zakon – glej str. 86): $F = -kx$. Odmik telesa iz ravnovesne lege smo označili s črko x , minus pa izraža dejstvo, da sila deluje v smeri, ki je nasprotna odmiku. Ta sila pa povzroča pospešek telesa: $F = ma$. Zato lahko napišemo

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (10.1)$$

Ker pa je pospešek drugi odvod poti po času (glej str.38), dobimo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (10.2)$$



Slika 10.3: Shematski prikaz časovne odvisnosti odmika (A), hitrosti (B) in pospeška (C) nihajočega telesa

To je diferencialna enačba drugega reda, katere rešitev je vsaka funkcija x , ki ima tako lastnost, da je njen drugi odvod sorazmeren funkciji sami.

Taki funkciji sta kotni funkciji sinus in cosinus. Zato bo funkcija

$$x = x_0 \sin \omega t \quad (10.3)$$

prav gotovo rešitev gornje diferencialne enačbe. To lahko preprosto preverimo. Odvajajmo to funkcijo dvakrat po času in dobimo:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t.$$

Sedaj vstavimo to na levo stran enačbe 10.2 in izraz 10.3 na njeno desno stran, dobimo:

$$-x_0 \omega^2 \sin \omega t = -\frac{k}{m} x_0 \sin \omega t. \quad (10.4)$$

Če x_0 in $\sin \omega t$ pokrajšamo, nam ostane preprosta zveza

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (10.5)$$

Kakšna je torej rešitev enačbe 10.2? Na sliki 10.3 A je prikazana funkcija $x = x_0 \sin \omega t$. Ta podaja odmik vzmetnega nihala iz mirovne lege. V začetnem času (pri $t = 0$) je odmik nič, telo je v ravnovesni legi. Nato odmik narašča in je največji ($x = x_0$), ko je $\omega t = \pi/2$. Ta največji odmik imenujemo **amplituda** nihanja. Nato se odmik manjša, telo gre ponovno skozi ravnovesno lego ter zaniha na drugo stran,

kjer je odmik negativen. Pri $\omega t = 2\pi$ pa se telo zopet vrne v ravnovesno lego. Pri tem je opravilo ravno en nihaj. Čas enega nihaja imenujemo **nihajni čas** in ga bomo označili s črko T . Število nihajev v časovni enoti pa je **frekvenca** nihanja:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (10.6)$$

Kot vidimo na sliki 10.3, je po enem nihaju $\omega T = 2\pi$ in je zato

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \quad (10.7)$$

Količina ω je zelo podobna kotni hitrosti pri kroženju in jo zato imenujemo **krožna frekvenca**. Kot smo videli v enačbi 10.5, je za vzmetno nihalo krožna frekvenca enaka $\sqrt{\frac{k}{m}}$, zato je frekvenca nihanja vzmetnega nihala

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.8)$$

Frekvenca nihanja je torej odvisna le od konstante vzmeti in mase nihajočega telesa. Večja masa bo nihala z manjšo frekvenco, torej bolj počasi, z daljšim nihajnim časom, saj je $T = 1/\nu$.

Ugotovimo še, kako se s časom spreminja hitrost nihajočega telesa. Kot smo videli na strani 36, dobimo hitrost z odvajanjem poti po času: $v = \frac{dx}{dt}$.

Če odvajamo enačbo 10.3, dobimo:

$$v = x_0 \omega \cos \omega t. \quad (10.9)$$

Časovno odvisnost hitrosti prikazuje slika 10.3 B. Vidimo, da je hitrost največja ($v_0 = x_0 \omega$), kadar gre nihajoče telo skozi ravnovesno lego (npr. pri $t = 0$), in nič, kadar je odmik telesa največji.

Pospešek nihajočega telesa pa lahko dobimo z odvajanjem hitrosti:

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (10.10)$$

To odvisnost prikazuje slika 10.3 C. Velikost pospeška je največja ($a_0 = x_0 \omega^2$) takrat, ko je tudi odmik največji.

Sedaj si že lahko odgovorimo tudi na naslednje vprašanje. Ugotovili smo, da enačbi 10.2 res ustreza funkcija $x = x_0 \sin \omega t$. Vendar vidimo, da bi tej enačbi enako dobro ustrezala tudi funkcija, ki bi namesto sinusa vsebovala kosinus – torej $x = x_0 \cos \omega t$. In ne samo to, tudi kakršnakoli vsota teh dveh funkcij bi bila povsem ustrezna. Kaj je torej prava rešitev enačbe nihanja? Odgovor je odvisen od naše odločitve, kdaj začnemo meriti čas. Če je v začetku (pri $t = 0$) telo v ravnovesni

legi, mora biti seveda odmik tedaj nič in gibanje podaja enačba $x = x_0 \sin \omega t$. Če pa bi se odločili in začeli čas meriti, ko bi bilo nihajoče telo v skrajni legi, bi seveda morali njegovo gibanje popisati s funkcijo $x = x_0 \cos \omega t$. V vsakem primeru pa bi časovno odvisnost odmika iz mirovne lege popisali s periodično funkcijo, ki bi imela eno samo krožno frekvenco ω . Tako gibanje imenujemo **harmonično nihanje**.

10.2.1 Energija vzmetnega nihala

Kadar vzmet raztegnemo (ali skrčimo) za razdaljo x , opravimo delo in energija vzmeti se poveča za $\frac{1}{2}k \cdot x^2$ (glej stran 135). Če upoštevamo še časovno odvisnost odmika (enačba 10.3), ugotovimo, da se elastična energija vzmeti pri nihanju s časom takole spreminja:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 \cdot \sin^2 \omega t. \quad (10.11)$$

Največja je, ko je odmik vzmetnega nihala največji. V ravnovesni legi, ko pa vzmet ni raztegnjena, je elastična energija vzmeti seveda nič.

Nihajoče telo pa ima kinetično energijo:

$$W = \frac{1}{2}mv^2.$$

To lahko izračunamo tako, da uporabimo časovno odvisnost hitrosti telesa, kot jo podaja enačba 10.9.

$$W_k = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t.$$

Če pa upoštevamo še enačbo 10.5, lahko ta izraz poenostavimo

$$W_k = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 \cdot \cos^2 \omega t. \quad (10.12)$$

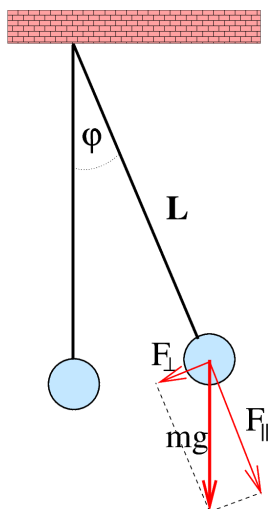
Kinetična energija nihajočega telesa je seveda največja, ko gre telo skozi ravnovesno lego, saj je tedaj tudi njegova hitrost največja.

Celotna energija nihala pa je vsota elastične energije vzmeti in kinetične energije nihajočega telesa. Torej je

$$W = W_{\text{el}} + W_k = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t).$$

Ker pa velja, da je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, končno dobimo za energijo nihala

$$W = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2. \quad (10.13)$$



Slika 10.4: Matematično nihalo. Dokler so odmiki iz ravnovesne lege majhni, je nihanje uteži na vrvici harmonsko.

Vidimo, da se celotna energija nihala s časom ne spreminja. Ko se na primer nihajoče telo oddaljuje od ravnovesne lege, se zmanjšuje njegova kinetična energija, vendar se za prav toliko povečuje elastična energija vzmeti. Energija se pri nihanju vzmetnega nihala le spreminja iz kinetične v elastično in obratno – skupna energija pa ostaja vseskozi nespremenjena.

10.3 Matematično nihalo

Matematično nihalo je majhna utež, obešena na vrvici. Predpostavili bomo, da se vrvica pri obremenitvi ne razteza in da je njena masa zanemarljivo majhna. Shematsko je matematično nihalo prikazano na sliki 10.4. Ko telo odmaknemo iz ravnovesne lege, komponenta sile teže temu nasprotuje in potisne telo nazaj v ravnovesno lego.

Silo teže telesa ($F_g = mg$) razstavimo na dve komponenti: silo $F_{\parallel}$, ki deluje v smeri vrvico, in silo $F_{\perp}$, pravokotno na vrvico. Če je kot odmika iz mirovne lege φ , je

$$F_{\parallel} = mg \cos \varphi, \quad F_{\perp} = mg \sin \varphi. \quad (10.14)$$

Kadar so odmiki nihala majhni, lahko pravokotno silo zapišemo približno kot

$$F_{\perp} \approx mg\varphi, \quad (10.15)$$

saj velja, da je za majhne kote $\sin \varphi \approx \varphi$. Če upoštevamo še, da je kot v radianih

kar dolžina loka deljeno z radijem, lahko zapišemo:

$$\varphi = \frac{x}{L},$$

kjer je L dolžina vrvice, x pa označuje odmik nihala od ravnovesne lege. Zato lahko gornjo enačbo zapišemo še drugače:

$$F_{\perp} \approx -mg \frac{x}{L}. \quad (10.16)$$

Pravokotni sili smo dali negativen predznak, saj deluje v smeri, ki je nasprotna odmiku x . Vidimo, da so razmere podobne kot pri vzmetnem nihalu. Tudi tu je sila sorazmerna odmiku iz mirovne lege. Seveda pa to velja le za majhne odmike.

Zato enako kot v prejšnjem primeru zapišemo, da sila, ki vrača nihalo v mirovno lego ($F_{\perp}$), povzroča pospešek a . In ker je pospešek drugi odvod odmika, dobimo podobno diferencialno enačbo, kot pri vzmetnem nihalu:

$$F_{\perp} = -mg \frac{x}{L} = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

To lahko lepše zapišemo kot

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x. \quad (10.17)$$

Rešitev te enačbe je seveda enaka kot v prejšnjem primeru:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

To funkcijo dvakrat odvajamo in jo vstavimo v enačbo 10.17. Dobimo zvezo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t = -\frac{g}{L} x_0 \sin \omega t,$$

ki jo lahko okrajšamo v

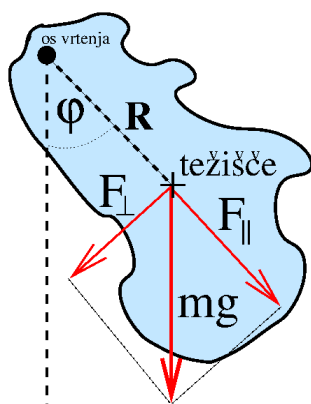
$$\omega^2 = \frac{g}{L}. \quad (10.18)$$

Frekvenca matematičnega nihala je tako

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (10.19)$$

Vidimo, da je frekvenca matematičnega nihala odvisna od velikosti težnostnega pospeška in dolžine vrvice nihala. Prav nič ni odvisna od mase nihala, niti od velikosti odmikov, dokler ti le niso preveliki.

To je bila ugotovitev, do katere je prišel Galileo Galilei z opazovanjem nihanja lestencev v katedrali v Pisi (stran 40).



Slika 10.5: Fizično nihalo je vsak predmet, ki je obešen tako, da lahko niha.

Primer 10.36

Kot primer izračunajmo, na kako dolgo vrvico moramo obesiti utež, da bo nihajni čas takega nihala ravno ena sekunda. Ker je nihajni čas $T = 1/\nu$, uporabimo enačbo 10.19 in dobimo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Dolžina vrvice takega sekundnega nihala mora biti zato

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 1 \text{ s}^2}{4\pi^2} = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

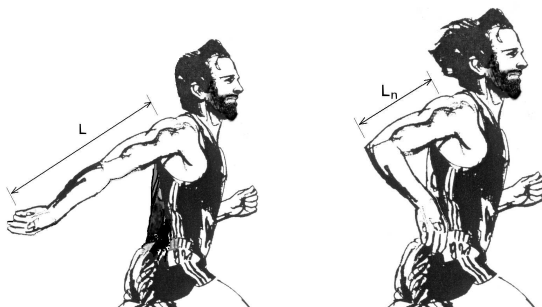
...

10.4 Fizično nihalo

Fizično nihalo je vsako togo telo, ki je obešeno tako, da lahko niha. Ko tako telo izmaknemo iz ravnovesne lege, deluje nanj navor sile teže, ki ga poskuša vrniti v ravnovesno lego. Zato pričakujemo, da bo telo začelo nihati, ko ga spustimo. Če tako kot na sliki 10.5, označimo s φ kot odmika telesa iz mirovne lege in je R razdalja od obesišča telesa do njegovega težišča, lahko zapišemo navor sile teže kot

$$M = Rmg \sin \varphi \approx Rmg\varphi.$$

Podobno kot pri matematičnem nihalu (enačba 10.15) smo tudi tu predpostavili, da so odmiki iz mirovne lege majhni in smo zato nadomestili $\sin \varphi$ kar s kotom φ . Navor je tedaj premo sorazmeren kotu odmika.



Slika 10.6: Računski primer: lastna frekvenca zgornjega uda je večja v flectiranem položaju

Ker pa navor povzroči kotni pospešek ($M = J\alpha$, enačba 7.12 na strani 110), dobimo:

$$-J\alpha = Rmg\varphi,$$

kjer smo z minusom označili, da ima kotni pospešek α smer, nasprotno odmiku. Ker je kotni pospešek drugi odvod kota po času, lahko zgornjo enačbo zapišemo:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgR}{J}\varphi. \quad (10.20)$$

Rešitev te enačbe sedaj že poznamo. Enačba je po obliki enaka enačbi 10.2 – drugi odvod funkcije je sorazmeren sami funkciji. Njena rešitev je funkcija, ki podaja harmonsko nihanje:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t. \quad (10.21)$$

Podobno kot pri matematičnem nihalu, tudi tu izračunamo krožno frekvenco nihanja. Dobimo:

$$\omega^2 = \frac{mgR}{J}, \quad (10.22)$$

kar nam da za frekvenco nihanja

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgR}{J}}. \quad (10.23)$$

Primer 10.37

Izračunajmo, kolikšna je lastna frekvenca nihanja zgornjega uda 170 cm visokega človeka. Predpostavimo, da je oblika zgornjega uda valjasta, s težiščem v sredini. Oddaljenost težišča od osi vrtenja v ramenu je tako $d = L/2$, če je L celotna dolžina zgornjega uda. To lahko ocenimo s pomočjo slike 1.3 na strani 13 kot vsoto dolžin posameznih segmentov:

$$L = (0,186 + 0,146 + 0,108) \cdot 170 \text{ cm} = 75 \text{ cm}.$$

Ker je vztrajnostni moment na koncu pritrjenega valja $m \cdot L^2/3$ (enačba 7.14 na strani 112), nam da enačba 10.23:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3mgL/2}{mL^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 9,8 \text{ ms}^{-2}}{2 \cdot 0,75 \text{ m}}} = 0,70 \text{ s}^{-1}.$$

Izračunajmo še nihajni čas: $T = \frac{1}{\nu} = 1,42 \text{ s}$.

• • •

Primer 10.38

Razmislimo še, kako se spremeni lastna frekvenca nihanja zgornjega uda, če roko v komolcu upognemo tako, da je kot med nadlaktjo in podlaktjo 90° (slika 10.6).

Izračunajmo vztrajnostni moment za ta primer. Nadlaket naj bo valjasta z dolžino

$$L_n = 0,186 \cdot 170 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$$

in maso m_n , ki je približno polovico celotne mase zgornjega uda (glej npr. tabelo 5.1 in sliko 5.10): $m_n = m/2$. Vztrajnostni moment nadlakti je zato $J_n = m_n \cdot L_n^2/3$.

Podlaket in roka pa imata skupaj maso $m/2$ in obe nihata v oddaljenosti L_n od ramena, zato je njun skupni vztrajnostni moment kar $m \cdot L_n^2/2$.

V tem položaju je torej vztrajnostni moment zgornjega uda kar vsota obeh prispevkov:

$$J = \frac{m}{2} L_n^2/3 + \frac{m}{2} L_n^2 = \frac{4}{6} m L_n^2.$$

Težišče zgornjega uda pa je skupno težišče nadlakti, ki je $L_n/2$ oddaljeno od ramena, ter podlakti in roke, ki sta oddaljeni L_n od ramena. Ker smo privzeli, da sta masi obeh kosov enaki, je skupno težišče zgornjega uda približno na treh četrтинah dolžine nadlakti:

$$R = \frac{3}{4} L_n.$$

Frekvenca nihanja bo sedaj

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgR}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg \frac{3}{4} L_n}{\frac{4}{6} m L_n^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9g}{8L_n}}.$$

Z našimi podatki dobimo:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \cdot 9,8 \text{ ms}^{-2}}{8 \cdot 0,32 \text{ m}}} = 0,93 \text{ s}^{-1}.$$

Vidimo, da se je lastna frekvenca nihanja zgornjega uda povečala. Nihanji čas pa se je skrajšal na $T = 1,1 \text{ s}$.

• • •

10.5 Torzijsko nihalo

V poglavju 6.3 na strani 92 smo videli, da je pri torzijski obremenitvi navor sorazmeren kotu zasuka (enačba 6.11).

Predstavljajmo si predmet, obešen na koncu dolge žice. Zasukajmo sedaj predmet okoli osi žice. Za ta zasuk smo potrebovali navor $M = D\varphi$. Takoj, ko predmet spustimo, žica z enako velikim navorom zavrti predmet nazaj v ravnovesno lego. Navor žice $-D\varphi$ torej povzroči kotni pospešek obešenega predmeta:

$$-D\varphi = J\alpha,$$

kjer je J vztrajnostni moment predmeta za vrtenje okoli osi žice.

Ker je kotni pospešek drugi odvod kota po času, lahko zgornjo enačbo zapišemo:

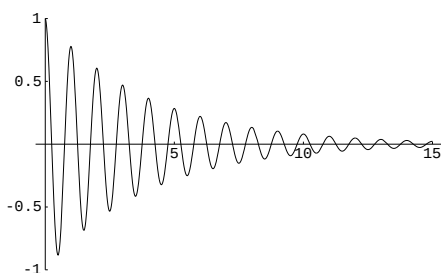
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J}\varphi. \quad (10.24)$$

Rešitev te enačbe je seveda ponovno harmonsko nihanje s krožno frekvenco:

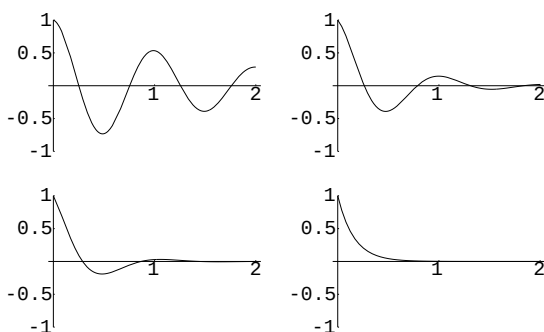
$$\omega^2 = \frac{D}{J}, \quad (10.25)$$

kar nam da za frekvenco nihanja torzijskega nihala

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}. \quad (10.26)$$



Slika 10.7: Pri dušenem nihanju se amplituda s časom zmanjšuje. Začetna amplituda prikazanega nihanja je 1 in nihajni čas nedušenega nihanja $T = 1$ s, koeficient dušenja pa 4 % kritičnega koeficienta.



Slika 10.8: Kadar povečamo koeficient dušenja, se nihajni čas poveča. Krivulje prikazujejo nihanje za koeficiente dušenja: 10 %, 30 %, 50 % kritičnega dušenja in kritičen primer. Nihajni čas nedušenega nihanja tega nihala je 1 s.

10.6 Dušeno nihanje

Nihala, ki jih opazujemo v vsakdanjem svetu, ne nihajo neskončno dolgo. Zaradi trenja, upora zraka in drugih energetske izgub, ki jih splošno imenujemo **dušenje**, se amplituda nihanja počasi zmanjšuje in nihalo se končno ustavi. Tako nihanje imenujemo **dušeno nihanje**. Primer malo dušenega nihanja je prikazan na sliki 10.7. Vidimo, da nihalo še vedno niha s točno določeno frekvenco, saj čas, ki ga potrebuje za en nihaj, ostaja ves čas enak. Le amplituda se eksponentno manjša. Povečajmo sedaj dušenje. Na sliki 10.8 vidimo, da se bo pri večjem dušenju amplituda nihanja hitreje zmanjševala, povečal pa se bo tudi nihajni čas. Če dušenje dovolj povečamo, opazimo, da nihalo ne niha več, ampak se le še počasi vrača proti ravnovesni legi, gibanje ni več periodično (nihanje) ampak **aperiodično**. Dušenje, kjer periodično gibanje postane aperiodično, imenujemo **kritično dušenje**. To je v praksi zelo pomembno. Tako naj bi na primer avtomobilski amortizerji in mehanizmi zapiranja nihajnih vrat poskrbeli za približno kritično dušenje in s tem preprečili nihanje. Pri analognih instrumentih, kot so npr. voltmetri, ampermetri ipd., pa je navadno dušenje malo podkritično, da kazalec sicer zaniha okoli ravnovesne lege, a se hitro ustavi. Če bi bilo dušenje veliko, bi tak instrument ne zaznal hitrih sprememb, majhno dušenje pa bi povzročilo nekontrolirano nihanje kazalca.

Primer 10.39

Za vajo si lahko ogledamo matematični opis dušenega nihanja vzmetnega nihala. Sila dušenja, ki nihaje zavira, vedno nasprotuje smeri gibanja in je po navadi sorazmerna hitrosti:

$$F_d = -\gamma v.$$

To silo dodamo v enačbo nihanja (10.1) in dobimo

$$m \cdot a = -k \cdot x - \gamma v. \quad (10.27)$$

Če to enačbo preuredimo, dobimo enačbo nihanja, ki je podobna enačbi 10.2, le da vsebuje še člen zaradi dušenja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0,$$

kar lahko še krajše zapišemo kot

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.28)$$

Pri tem smo upoštevali, da je krožna frekvenca nedušenega nihanja $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (enačba 10.5), in vpeljali koeficient dušenja β kot

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}.$$

Rešitev enačbe 10.28 ima obliko:

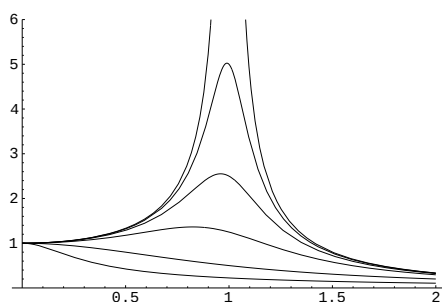
$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \quad (10.29)$$

Podobno kot pri nedušenem nihanju na strani 143 izračunamo prvi in drugi odvod odmika ($\frac{dx}{dt}$ in $\frac{d^2x}{dt^2}$) ter ju vstavimo v enačbo 10.28. Iz dobljene enačbe ugotovimo, da je krožna frekvenca dušenega nihanja

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (10.30)$$

Kadar je nihanje nedušeno, je $\beta = 0$ in enačba 10.30 nam da res frekvenco nedušenega nihanja $\omega = \omega_0$. Če pa se koeficient dušenja poveča, nam enačba 10.30 pokaže, da se krožna frekvenca nihanja zmanjša. Kadar je koeficient dušenja enak ω_0 , je krožna frekvenca (ω) enaka nič. Nihalo tedaj ne niha – to je aperioidni primer. To je kritična vrednost koeficienta dušenja. Pri manjših vrednostih β dobimo nihanje, pri večjih vrednostih koeficienta dušenja pa le še eksponentno vračanje nihala v ravnovesno lego.





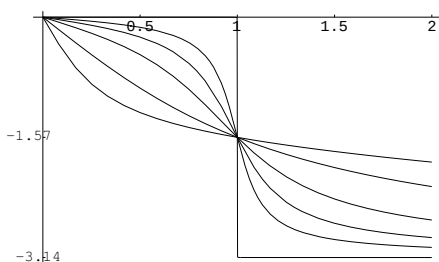
Slika 10.9: Amplituda vsiljenega nihanja v odvisnosti od frekvence vzbujanja (ω/ω_0) za različne vrednosti koeficienta dušenja: $\beta = 0, 10 \%, 20 \%, 40 \%, 70, 7 \%$ in 100% kritične vrednosti

10.7 Vsiljeno nihanje

Zaradi dušenja se vsako nihalo prej ali slej ustavi. Mehanska ura, ki je ne navijemo, nam ne kaže prav dolgo pravega časa. In veje drevesa prenehajo nihati, ko ni več vetra. Kadar želimo, da nihalo niha dalj časa in z nezmanjšano amplitudo, mu moramo dovajati energijo, ki jo izgublja zaradi dušenja. To storimo tako, da nihalo poganjamo z zunanjo periodično silo. Tako nihanje imenujemo vsiljeno nihanje. Zunanja sila namreč nihalu vsiljuje nihanje z določeno frekvenco. Iz izkušnje vemo, da je vpliv zunanje sile največji, kadar je frekvenca zunanje sile približno enaka **lastni frekvenci** (ω_0) nihala. To je frekvenca, s katero bi nihalo nedušeno nihalo, če bi ga odmaknili iz mirovne lege in pustili prosto nihati.

Slika 10.9 prikazuje, kako se spreminja amplituda nihanja v odvisnosti od frekvence vzbujanja. Na abscisi smo prikazali razmerje med frekvenco vzbujanja in lastno frekvenco nihala (ω/ω_0). Ker je amplituda nihanja odvisna tudi od koeficienta dušenja, smo narisali na sliki 10.9 več krivulj. Prva prikazuje primer brez dušenja ($\beta = 0$). Velikost zunanje sile smo izbrali tako, da je odmik nihala ravno enak ena, kadar je frekvenca te sile nič, tj. kadar ni nihanja. Če frekvenco vzbujanja povečujemo, nam slika 10.9 pokaže, da amplituda nihanja narašča. Kadar ni dušenja, postane amplituda nihanja neskončno velika, ko je frekvenca zunanje sile ravno enaka lastni frekvenci nihala. Ta pojav imenujemo **resonanca**. Če pa frekvenco vzbujanja še naprej povečujemo, vidimo, da se začne amplituda nihanja manjšati.

Ker pa imamo v praksi vedno opraviti tudi z dušenjem, nas na sliki 10.9 zanimajo predvsem naslednje krivulje. Vidimo, da tudi v tem primeru pride do resonance. Če je dušenje majhno, amplituda nihanja močno naraste, kadar nihalo vzbujamo s frekvenco blizu lastni frekvenci. Prav gotovo ste že opazovali otroka, ki poganja gugalnico. S sunki v primernih trenutkih doseže, da so odmiki gugalnice vse večji. Frekvenca teh sunkov se seveda ujema z lastno frekvenco gugalnice. Če pa bi zamižali in poskušali suvati gugalnico z drugačno frekvenco, bi amplituda nihanja gugalnice prav gotovo ne narastla.



Slika 10.10: Fazni premik (δ) v odvisnosti od frekvence vzbujaanja za različne vrednosti koeficienta dušenja: $\beta = 0, 10 \%, 20 \%, 40 \%, 70,7 \%$ in 100% kritične vrednosti

Pravijo, da je bil slavní tenorist Enrico Caruso sposoben s svojim glasom razbiti šampanjski kozarec. Zapel je namreč ton, ki se je ujemal z lastno frekvenco kozarca. Amplituda nihanja kozarca je zaradi resonance tako narastla, da je preseгла mejo trdnosti stekla in kozarec se je razletel.

Bolj kot je nihanje dušeno, manj izrazita je resonanca. Poleg tega opazimo, da se vrh krivulje z dušenjem premakne proti levi – k manjšim frekvencam torej. Pri bolj dušenih nihalih dobimo zato največje odmike, ko jih vzbujaemo s frekvenco, ki je manjša od lastne frekvence. Čim večje je dušenje, tem nižja je torej resonančna frekvenca. Kadar pa je dušenje veliko, tj. kadar je koeficient dušenja večji od približno 70% kritične vrednosti, pa do resonance sploh ne pride. Večja kot je frekvenca vzbujaanja, manjši so odmiki nihala.

Primer 10.40

Poskusimo razumeti še matematični opis vsiljenega nihanja. Kot primer bomo obravnavali vzmetno nihalo, vendar bodo rezultati veljali splošno.

Napišimo sile, ki delujejo na nihalo. Poleg sile vzmeti ($-k \cdot x$) in sile dušenja ($-\gamma v$) deluje sedaj še zunanja sila. Ta naj bo periodična z amplitudo F_0 . Zapišemo jo kot

$$F = F_0 \sin \omega t,$$

kjer je ω krožna frekvenca nihanja vzbujevalne sile.

Podobno kot na strani 153 lahko sedaj napišemo enačbo sil, ki delujejo na nihalo:

$$m \cdot a = -k \cdot x - \gamma v + F_0 \sin \omega t. \quad (10.31)$$

To enačbo preuredimo in dobimo:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (10.32)$$

Enako kot v enačbi 10.28 je β koeficient dušenja in ω_0 lastna krožna frekvenca nihala.

Pričakujemo, da bo nihalo nihalo z enako frekvenco kot vzbujevalna sila, ni pa nujno, da sili povsem sledi. Prav mogoče je, da so njegovi odmiki premaknjeni za fazni kot δ glede na sliko. Rešitev enačbe 10.32 zato zapišemo

v obliki

$$x = A \sin(\omega t + \delta). \quad (10.33)$$

Izračunamo prvi in drugi odvod odmika po času ter ju vstavimo v enačbo 10.32. Zberemo skupaj člene, ki so sorazmerni $\sin \omega t$ in tiste, ki vsebujejo $\cos \omega t$. Enačbo 10.32 lahko izpolnimo le, če je vsak od obeh prispevkov enak nič. Členi s $\cos \omega t$ nam dajo fazni premik

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.34)$$

Ta pa nam da skupaj s sinusnimi členi vrednost amplitude vsiljenega nihanja kot

$$A = -\frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (10.35)$$

Graf amplitude vsiljenega nihanja prikazuje slika 10.9. Kadar ni dušenja, tj. $\beta = 0$, res postane amplituda neskončno velika, če je frekvenca vsiljenega nihanja enaka lastni frekvenci nihala ($\omega = \omega_0$).

Kdaj pa pride do resonance pri dušenem nihanju? Ugotovimo, pri kateri krožni frekvenci ω je amplituda A največja. Funkcija $A(\omega)$ ima ekstrem, kadar je odvod $\frac{dA}{d\omega}$ enak nič. Dobimo:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Pri $\beta = 0$ pride seveda do resonance pri lastni frekvenci nihala $\omega_{\max} = \omega_0$. Vidimo, da postaja resonančna frekvenca vse manjša, ko povečujemo koeficient dušenja. In končno pri $\beta^2 = \omega_0^2/2$ postane resonančna krožna frekvenca nič. Tedaj je $\beta = \omega_0/\sqrt{2}$.

Oglejmo si še pomen faznega premika, ki ga podaja enačba 10.34. Za različne vrednosti koeficienta dušenja je ta narisana kot funkcija frekvence (ω/ω_0) na sliki 10.10. Vidimo, da nihalo pri majhnih frekvencah vzbujanja sledi zunanji sili, saj je tedaj δ blizu nič. Fazni premik se z večanjem frekvence zmanjšuje in postane enak $-\pi/2$, ko je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci. To pomeni, da je sila nič, ko je odmik največji, in sila največja, ko gre nihalo skozi mirovno lego.



10.8 Povzetek

Kadarkoli deluje na telo sila, ki je po velikosti premo sorazmerna odmiku iz ravnovesne lege, dobimo enostavno harmonsko gibanje. To je nihanje, kjer je odmik iz ravnovesne lege:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

x_0 je največji odmik nihala iz ravnovesne lege (amplituda nihanja), ω pa je krožna frekvenca:

$$\omega = 2\pi\nu$$

$\nu = \frac{1}{T}$ je frekvenca nihanja in T nihajni čas, to je čas enega nihanja.

Vzmetno nihalo: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Matematično nihalo: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$

Fizično nihalo: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J}}$

J – vztrajnostni moment nihala

Torzijsko nihalo: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$

Dušeno nihanje:

amplituda nihanja s časom pada: $x = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$

Večje kot je dušenje, večji je nihajni čas: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

Vsiljeno nihanje:

nihalo niha s frekvenco sile vzbujanja,

amplituda nihanja je odvisna od frekvence vzbujanja in koeficienta dušenja,

resonanca: amplituda vzbujenega nihanja je največja,

pri dušenem nihalu je resonančna frekvenca $\omega_{\max}$ manjša od lastne frekvence

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Splošna enačba nihanja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

β – koeficient dušenja

ω_0 – lastna krožna frekvenca nihala

F_0 – amplituda sile vzbujanja

ω – krožna frekvenca sile vzbujanja

10.9 Vprašanja

1. Na vzmet obesimo utež in jo zanihamo. Ugotovimo, da v eni minuti opravi 120 nihajev. Izračunaj, kolikšna je frekvenca tega nihanja in kolikšen je nihajni čas.
2. Na vzmet obesimo utež z maso 3 kg in jo zanihamo. Ugotovimo, da je frekvenca nihanja $1,5 \text{ s}^{-1}$. Izračunaj, kolikšna bo frekvenca nihanja, če na isto vzmet obesimo utež z maso 1 kg.
3. Na vzmet obesimo utež z maso 0,5 kg in jo zanihamo. Ugotovimo, da je frekvenca nihanja 2 s^{-1} . Izračunaj, za koliko se je raztegnila ta vzmet, ko smo nanjo obesili utež.
4. Če smo dali masi, ki visi na vzmeti, več energije, ko smo jo zanihali, pojasni, kako se bo to odražalo pri amplitudi nihanja in frekvenci.
5. Na 1 m dolgo vrvico obesimo utež in jo zanihamo. Izračunaj, kolikšna sta nihajni čas in frekvenca tega nihala.
6. Na 2 m dolgo vrvico obesimo utež in jo odmaknemo 1 cm iz mirovne lege. Izračunaj, kolikšna je navečja hitrost tega nihala.
7. Kako se spremeni nihajni čas matematičnega nihala, če skrajšamo dolžino vrvice na polovico?
8. Nariši graf odvisnosti nihajnega časa matematičnega nihala od dolžine vrvice.
9. Nariši graf odvisnosti logaritma nihajnega časa matematičnega nihala od logaritma dolžine vrvice.
10. Pojasni, kako se spremeni frekvenca nihanja matematičnega nihala, če ga iz Ljubljane nesemo na vrh Mont Blanca (4807 m).
11. Kolikšna je frekvenca nihanja vzmetnega nihala na Luni, če to na Zemlji potrebuje za en nihaj 0,5 s?
12. Nihalo stenske ure je sestavljeno iz homogene palice dolžine 500 mm in mase 0,2 kg, na katero je pritrjena utež v obliki okrogle plošče z maso 0,6 kg in polmerom 100 mm.
 - Kolikšna je razdalja med pritrdiščem nihala in njegovim težiščem?

- Kolikšen je vztrajnostni moment nihala? Vztrajnostni moment na koncu pritrjene palice dolžine ℓ je $\frac{1}{3}m\ell^2$, vztrajnostni moment valja, ki se vrti okoli svoje osi, pa je $\frac{1}{2}mr^2$.
 - Kolikšen je nihajni čas tega nihala?
13. V kakšnih enotah merimo koeficient dušenja?
14. Utež obesimo na vrvico in zanihamo. Zaradi dušenja bodo odmiki postajali vse manjši. Kako se bo pri tem spreminjal nihajni čas? Kaj pa največja hitrost?
15. Nariši graf odvisnosti krožne frekvence nihala od koeficienta dušenja (glej enačbo 10.30).
16. Nariši graf odvisnosti nihajnega časa nihala od koeficienta dušenja.
17. Na slikah 10.7 in 10.8 je zaradi preglednosti prikazano nihanje tako, da ima odmik največjo vrednost v začetku. Napiši enačbo tega nihanja in jo primerjaj z enačbo 10.29.
18. Amplituda nihanja lestenca v dvorani se v petih sekundah zmanjša na desetino začetne vrednosti.
- Kolikšen je koeficient dušenja?
 - Kolikšna je lastna frekvenca nedušenega nihanja tega lestenca, če je v desetih sekundah dvajsetkrat zanihal?
19. Oglej si kakšno mehansko uro. Ugotovi, kakšno je nihalo in kako lahko nastavljamo frekvenco njegovega nihanja. Prouči, kako dovajamo uri energijo, ki jo porabi zaradi dušenja.

11

TEKOČINE



Slika 11.1: Ledenik Mer de Glace v bližini Mont Blanca

Tekočine so za naše življenje najpomembnejša oblika snovi - živimo na dnu plinskega morja in tudi naše telo je sestavljeno skoraj samo iz tekočin. In vendar nas tekočine s svojimi lastnostmi vedno znova presenečajo.

Slika 11.1 prikazuje ledenik Mer de Glace v bližini Mont Blanca. Ta nastane z združitvijo dveh ledenikov in je od blizu videti kot zmrznjeno morje – od tod tudi njegovo ime. Čeprav je videti negiben, se led giblje s precejšnjo hitrostjo – 950 m na leto v zgornjem delu in 120 m na leto v spodnjem. Širina ledenika je zgoraj 40 do 60 m, v spodnjem delu pa približno 800 m. V spodnjem delu je največja debelina ledu okoli 400 m. Navpični presek ledenika je polkrožen. Na spodnji levi strani slike so dobro vidne temnejše črte, imenovane Forbesovi pasovi. Ti kažejo, da se ledenik v sredini giblje hitreje kot blizu roba. Ali bi iz vsega tega lahko sklepali, da je ledenik tekočina? Kaj je torej tisto, kar loči tekočine od trdnih snovi?

Za razliko od trdnih snovi se tekočine le malo upirajo spremembi oblike - vedno se prilagodijo obliki posode. Zato se pretakajo, tečejo. Z besedo tekočine označujemo kapljevine in pline. Kapljevine obdržijo določeno prostornino, ki jo lahko spremenimo le z zunanjo silo. Imajo gladino, ki je pri mirujoči kapljevini pravokotna na zunanjo silo. V vsakdanjem življenju kapljevine pogosto imenujemo kar tekočine. Plini pa nimajo niti določene prostornine – razširijo se tako, da napolnijo celotno posodo.

Tekočine ločimo od trdnih snovi po tem, da je njihov strižni modul (glej stran 94) vedno enak nič. Trdne snovi so elastične in imajo določeno ravnovesno obliko. Če jih deformiramo, se poskušajo vrniti v to ravnovesno stanje. Tekočine pa nimajo ravnovesne oblike. Kakorkoli že poskušamo tekočino strižno obremeniti, vedno se premakne tako, da bo strižna sila enaka nič.

11.1 Gostota

V vsakdanjem življenju včasih pravimo, da je na primer svinec "težji" od lesa. Pri tem seveda ne mislimo, da je drevesno deblo težje od svinčenega zrna. Kar hočemo povedati, je, da ima kos svinca večjo maso kot enako velik kos lesa. Ali drugače povedano: masa dane prostornine je pri svinču večja kot pri lesu. Svinec je zato bolj "gost" kot les.

Gostoto zato definiramo kot maso na enoto prostornine:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (11.1)$$

kjer je m masa predmeta in V njegova prostornina. Predmeti, narejeni iz čistih snovi, imajo lahko zelo različne oblike in velikosti, vendar pa bo njihova gostota vedno enaka.

Tabela 11.1: Gostota nekaterih snovi pri 20 °C

Trdne snovi	Gostota [10 ³ kg/m ³]	Kapljevine	Gostota [10 ³ kg/m ³]
hrastov les	0,7 – 0,9	bencin	0,68
led (0 °C)	0,917	etilni alkohol	0,79
polivinil	1,4	strojno olje	0,9
kost	1,8 – 2,0	voda (4 °C)	1,00
beton	2	morska voda	≈ 1,025
steklo	2,2 – 2,9	kri	1,06
aluminij	2,70	glicerol	1,26
železo	7,88	živo srebro	13,55
medenina	8,6		
baker	8,93		
srebro	10,5		
svinec	11,35		
zlato	19,31		
platina	21,4		

Plini (1 bar)	Gostota [kg/m ³]
Zrak	1,29
Helij	0,179
Ogljikov dioksid	1,98

Gostote nekaterih snovi so podane v tabeli 11.1. Gostote trdnih snovi in kapljev in so navedene v 10³ kg/m³, gostote plinov pa so manjše in so zato podane v kg/m³. Ker je gostota odvisna od temperature in tlaka, sta navedeni tudi ti dve količini.

Primer 11.41

Kot primer izračunajmo maso zraka v 3 m x 4 m x 2,5 m veliki sobi.

Izračunamo prostornino sobe: $V = 30 \text{ m}^3$. Iz tabele 11.1 preberemo, da je gostota zraka 1,29 kg/m³. Zato je masa zraka:

$$m = \rho V = 1,29 \text{ kg/m}^3 \cdot 30 \text{ m}^3 = 38,7 \text{ kg}.$$

Čeprav je zrak videti tako redek, da nanj pogosto kar pozabimo, nam je ta izračun pokazal, da je njegova masa kar velika – ugotovili smo, da je v ne posebno veliki sobi skoraj štirideset kilogramov zraka. Kako lahko maso plinov izračunamo iz osnovnih podatkov in od česa vse je odvisna, pa si bomo ogledali v poglavju 13.2 na strani 220.



Primer 11.42

Izračunajmo še, kolikšna bi bila masa enake prostornine vode.
Ker je gostota vode 10^3 kg/m^3 , dobimo:

$$m = \rho V = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 30 \text{ m}^3 = 3 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Gostota vode je veliko večja od gostote zraka. Ker je masa enega litra vode 1 kg, tehta 1 m^3 vode kar eno tono (1000 kg).

• • •

11.2 Tlak v mirujoči tekočini

Mera za tlak (p) je sila (F), ki deluje pravokotno na površinsko enoto (S):

$$p = \frac{F}{S}. \quad (11.2)$$

Enota za tlak je N/m^2 . Imenujemo jo pascal (Pa). Včasih uporabljamo tudi enoto bar, za katero velja, da je $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ in je približno enaka normalnemu zračnemu tlaku na morski gladini.

Primer 11.43

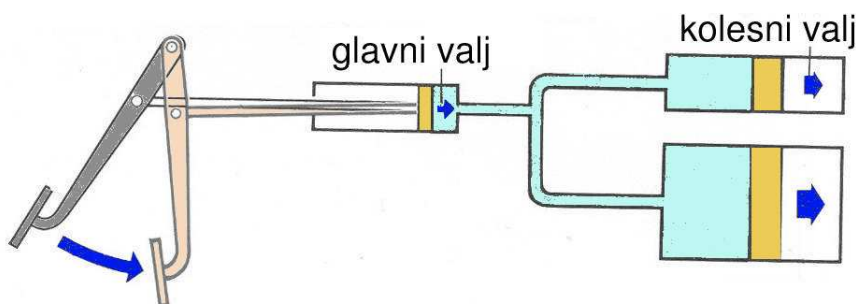
Izračunajmo tlak pod podplati človeka z maso 60 kg, če je skupna površina obeh podplatov 500 cm^2 .

Teža človeka je $F = m \cdot g = 60 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 589 \text{ N}$. Ker je površina $S = 500 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, izračunamo tlak $p = F/S = 589 \text{ N} / (5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2) = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. Ker je masa podana na dve mesti, smo na toliko mest zaokrožili tudi rezultat.

Če bi isti človek stal samo na eni nogi, bi bila njegova teža seveda enaka, na polovico pa bi se zmanjšala površina podplatov. Zato bi bil tlak dvakrat večji: $2,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$.

• • •

V mirujoči tekočini deluje sila zaradi tlaka vedno pravokotno na vsako ploskev, s katero je tekočina v stiku. Zato je sila vedno pravokotna na vsak del površine posode, neodvisno od njene oblike. Da to drži, lahko ugotovimo z enostavnim premislekom. Če na del površine deluje tekočina z določeno silo, seveda ta del površine deluje nazaj na tekočino z enako silo v obratni smeri. Če ta sila ne bi bila pravokotna na površino, bi tekočina, ker je pač tekočina, stekla vzdolž ploskve. In to bi trajalo toliko časa, dokler bi obstajala kakšna komponenta sile vzdolž ploskve.



Slika 11.2: Shema delovanja avtomobilskih zavor. Prikazana sta dva različna kolesna valja.

Če torej tekočina miruje, pomeni, da sila stene posode na tekočino nima nobene vzdolžne komponente – torej je v vsaki točki pravokotna na površino posode. In zato je seveda tudi sila tekočine povsod pravokotna na steno posode.

Z enakim razmislekom ugotovimo tudi, da mora biti v mirujoči tekočini sila prav tako vedno pravokotna na vsak del površine teles, ki so potopljena v tekočino. In ne samo to. Če si zamislimo katerikoli delček tekočine, ugotovimo, da nanj pritiska okoliška tekočina z vseh strani z enako silo.

Iz tega sledi še eno zanimivo spoznanje. Če pritisnemo z določenim tlakom na površino tekočine, ki je zaprta v posodi, se ta tlak prenese po celotni tekočini. Temu spoznanju pravimo **Pascalov princip**, po francoskem filozofu in znanstveniku Blaiseu Pascalu (1623–1662).

Pascalov princip je tudi praktično zelo uporaben. Če na tekočino v cevi pritisnemo z določeno silo, ustvarimo tlak. Ta se prenese na vso tekočino in tudi na drugi konec cevi. Silo lahko tako prenašamo po zelo zavutih poteh. Poleg tega pa s silo (F_1) na eni strani cevi s površino odprtine S_1 ustvarimo tlak $p = F_1/S_1$, ki se prenese po cevi na njen drugi konec. Če ima ta večjo površino (S_2), bo tudi sila večja $F_2 = p \cdot S_2$ oziroma:

$$F_2 = F_1 S_2 / S_1.$$

Na tej podlagi so zgrajene mnoge hidravlične naprave, od različnih dvigal do avtomobilskih zavor. Na sliki 11.2 je prikazano delovanje avtomobilskih zavor. Ko pritisnemo na zavorni pedal, se sila noge prenese na bat v glavnem valju, ki v zavorni tekočini ustvari tlak. Ta se po ceveh razširi do vseh koles avtomobila in na zavorne bate v njih. Kolikorkrat so ti večji od bata v glavnem valju, tolikokrat je sila nanje večja od sile na glavni bat. Z majhnim pritiskom na zavorni pedal tako

ustvarimo veliko silo na zavorne bate, ki pritisnejo zavorne ploščice ob disk kolesa. Kot vidimo na sliki, silo noge še dodatno povečamo s principom vzvoda. Zavorni pedal je namreč pritrjen v eni točki, in sicer tako, da je ročica sile noge veliko večja od ročice sile glavnega bata.

Uporabo hidravličnega prenosa tlaka opazimo tudi v živem svetu. Tako na primer morske vetrnice spreminjajo obliko s pritiskom mišic na svoje notranje odprtine, napolnjene z morskovo vodo. Noge pajkov imajo le fleksorske mišice, ekstenzijo pa dosežejo tako, da povečajo tlak tekočine v svojih nogah.

11.3 Blaise Pascal

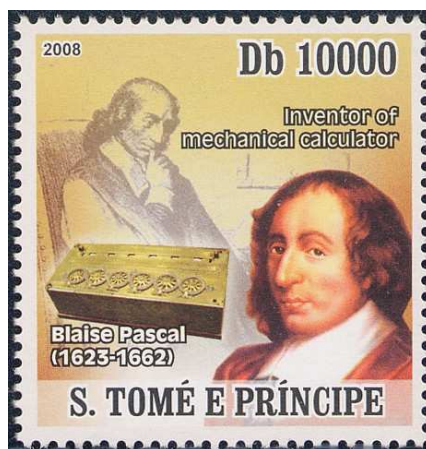


Francoski matematik, fizik in filozof Blaise Pascal (1623-1662) je eden najpomembnejših evropskih znanstvenikov sedemnajstega stoletja. Bil je odličen matematik - med drugim se je ukvarjal s stožčevimi preseki in teorijo števil, kjer je znan njegov Pascalov trikotnik binomskih koeficientov. Na področju študija tekočin je pojasnil pojem tlaka in vakuum, po njem se danes imenuje enota za tlak (pascal).

Pri osemnajstih letih je Pascal izdelal prvi mehanski računski stroj (kasneje poznan

tudi pod imenom Pascaline), ki je zmožal seštevati in odštevati šestmestna števila. Z njim je pomagal očetu pri njegovi obsežni reorganizaciji davčnega sistema v mestu Rouen, kjer je bil glavni davkar. Po njem, kot začetniku razvoja računskih strojev, so poimenovali programski jezik pascal.

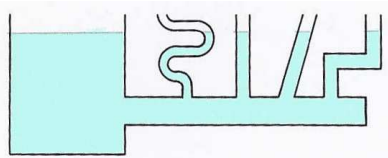
V drugem delu svojega kratkega življenja se je posvetil predvsem filozofiji, kjer se je ukvarjal z odnosom vere in razuma.



11.4 Hidrostatični tlak

Hidrostatični tlak je tlak, ki nastane v mirujoči tekočini zaradi teže tekočine. V tekočini deluje v globini h na ploskvico s površino S teža tekočine nad njo:

$$F = \rho g V = \rho g h S. \quad (11.3)$$



Slika 11.3: Vezne posode - višina tekočine ni odvisna od oblike posameznih cevi.

Hidrostatični tlak ($p = F/S$) je zato

$$p = \rho gh. \quad (11.4)$$

Hidrostatični tlak je torej odvisen le od globine in gostote tekočine. Je neodvisen od smeri in je enak v vseh točkah v enaki globini. Prav tako tudi ni odvisen od oblike posode, v kateri je tekočina. Če nalijemo tekočino v med seboj povezane posode (vezne posode) (slika 11.3) je zato višina tekočine enaka v vseh krakih posod, neodvisno od njihove oblike.

Primer 11.44

Izračunajmo, kolikšen tlak deluje na potapljača v globini 10 m pod vodno gladino.

Ker je $p = \rho gh$, kjer je ρ gostota vode, ki jo poznamo (ali pa jo preberemo iz tabele 11.1), globina $h = 10$ m, za težnostni pospešek pa vzamemo kar vrednost $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Dobimo: $p = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$.

Vidimo, da se v vodi na vsakih 10 m globine poveča tlak za približno 1 bar.

Kolikšen tlak torej deluje na potapljača? Na površino vode deluje zunanji zračni tlak, ki je približno 1 bar, in ta se prenese po vsej tekočini. Poleg tega pa v globini 10 m deluje še hidrostatični tlak, ki je 1 bar. Na potapljača deluje torej tlak $p = 2 \text{ bar}$.

• • •

Oglejmo si sliko 11.4. Nad vasjo, ki je zgrajena na najvišji okoliški vzpetini, se dviga stolp. To je zbiralnik za vodo, iz katerega vodijo vodovodne cevi do hiš v vasi. Vanj črpajo vodo iz izvira. Ker je vodna gladina v stolpu višja od vseh hiš, prebivalcem vasi priteče voda iz vodovodne pipe, kadar jo odprejo. Od česa je odvisen tlak iztekajoče vode? Samo od razlike višin med gladino vode v stolpu in vodovodno pipo (enačba 11.4).



Slika 11.4: Vodni stolp v katalonski vasi

11.5 Zračni tlak

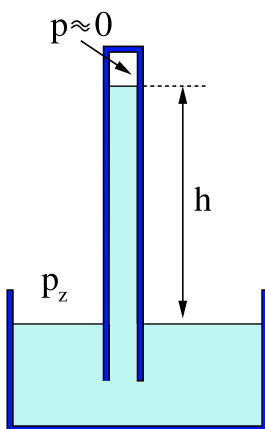
Slika 11.5 prikazuje preprost poskus. Stekleno cev napolnimo s tekočino in jo postavimo v drugo posodo s tekočino. Opazimo, da tekočina le malo izteče iz cevi, in sicer toliko, da je višina h vedno enaka. Ali lahko to razumemo? Na površino tekočine deluje zračni tlak (p_z). Navpičen stolpec tekočine pa ustvari v posodi hidrostatski tlak $p = \rho gh$. Ta se enakomerno prenese po vsej tekočini, tudi do njene gladine. Tekočina miruje, če je tlak tekočinskega stolpca ravno enak zračnemu tlaku. Kadar se zračni tlak zmanjša, se ustrezno zmanjša tudi višina tekočinskega stolpca h . Taka naprava nam torej prikazuje zračni tlak in jo zato imenujemo barometer.

Izračunajmo, kolikšna bi bila višina stolpca, če bi cev napolnili z vodo. Če je zračni tlak 1 bar, kar je enako 10^5 N/m^2 , dobimo:

$$h = p_z / \rho g = 10^5 \text{ N/m}^2 / (10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2) = 10,2 \text{ m}.$$

Vidimo, da tak vodni barometer ne bi bil prav posebno priročen, saj bi zanj potrebovali stekleno cev, ki bi bila dolga več kot 10 m. Tak vodni barometer je najverjetneje prvi izdelal v Rimu okoli leta 1640 Gaspar Berti. Z njim je hotel predvsem pokazati, da je v nasprotju s tedanjim prepričanjem vakuum mogoč in da res nastane nad vodno gladino v cevi.

Kako pa lahko naredimo barometer s krajšo cevjo? Preprosto, namesto vode uporabimo tekočino z večjo gostoto. Pogled v tabelo 11.1 nam pokaže, da je tekočina z največjo gostoto živo srebro. Živosrebrni barometer bi pri zračnem taku 1 bar imel stolpec visok le 75 cm. Prvi živosrebrni barometer pripisujemo italijanskemu znanstveniku z imenom Evangelista Torricelli. Ta je po letu 1644 z njim opravil



Slika 11.5: Preprost barometer

vse mogoče poskuse – zanimalo ga je predvsem, kaj vpliva na zračni tlak in ali je nad živim srebrom v cevi res vakuum. V enem od poskusov je od spodaj skozi živo srebro v cev porinil živo miško. Zapisal je, da je v vakuumu poginila, čeprav se ni mogel povsem odločiti, ali je ni morda pokončala že pot skozi tekočino.

Živosrebrne barometre so tako pogosto uporabljali za merjenje zračnega tlaka, da je bilo najbolj enostavno tlak podajati kar v milimetrih Hg. Normalni zračni tlak je še vedno definiran kot 760 mmHg, kar ustreza $1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. V čast izumitelju so enoto mmHg poimenovali torr.

Odgovorimo še na vprašanje, zakaj nastane zračni tlak. Ker živimo na dnu zračnega oceana, na nas pritiska stolpec zraka nad nami – to je hidrostatski tlak zraka. Više kot se vzpnemo, manj zraka je nad nami in zato se zračni tlak z višino manjša. To spoznanje danes uporabljamo za merjenje nadmorske višine – višinomeri (kot na primer na sliki 10.1, stran 141) v resnici merijo spremembo zračnega tlaka in rezultat nato prikažejo kot višino.

Prvi, ki je pokazal, da se zračni tlak manjša z višino, je bil leta 1648 Florin Perier. Uporabil je dva živosrebrna barometra, kakršna je nekaj let prej izumil Torricelli. V samostanu pod gričem Puy de Dôme (1465 m) v osrednji Franciji je zaupal en barometer v varstvo menihom, sam pa se je z drugim v spremstvu več uglednih lokalnih ljudi, ki naj bi potrdili verodostojnost poskusa, odpravil na vrh griča. V svoje veliko veselje je ugotovil, da se je višina živosrebrnega stolpca na vrhu zmanjšala. Ko pa se je pozneje vrnil v samostan, sta oba barometra ponovno kazala enako in menihi so mu zatrdili, da se ni med njegovo odsotnostjo gladina v cevi niti malo premaknila.

Tovrstne meritve so kasneje še velikokrat ponovili. De Saussure, ki je bil pobudnik prvega vzpona na Mont Blanc, je tam opravil več meritev zračnega tlaka (in ob tem opisal tudi svoje simptome višinske bolezni), pa tudi Valentin Stanič

je pri svojem prvenstvenem vzponu na Watzmann (2713 m) leta 1899 (ali morda 1901) s seboj nosil steklen živosrebrni barometer. Danes vemo, da se zračni tlak z višino hitro manjša. Na višini okoli 5500 m se zmanjša na približno polovico tlaka na morski gladini, pri 8500 m pa že na tretjino. Pri vzponu nad 2500 m se pri večini ljudi pojavijo prvi znaki pomanjkanja kisika, ki nato po navadi z aklimatizacijo hitro izginejo. Na višinah nad 5300 m pa je zračni tlak že tako nizek, da tu najverjetneje popolna aklimatizacija sploh ni več mogoča. Zato tudi ne preseneča podatek, da najvišja vas na svetu ne leži više kot 5340 m (Aconquilcha, Čile).

11.6 Vzgon

Zaradi hidrostatičnega tlaka se nam zde telesa, potopljena v tekočino, lažja. Na potopljeno telo namreč deluje navzgor, v obratni smeri kot teža, sila tekočine, ki jo imenujemo vzgon. Vzgon je po velikosti enak teži izpodrinjene tekočine. To pravilo imenujemo Arhimedov princip, po Arhimedu iz Siracuse (stran 172). Prijemališče vzgona je v težišču izpodrinjene tekočine. Pri človeku, ki leži v vodi, je težišče izpodrinjene vode bližje glavi kot težišče telesa.

Primer 11.45

Svinčena krogla premera 20 cm leži na dnu jezera. Izračunajmo, kolikšno silo potrebujemo, do jo dvignemo.

Teža krogle je $F_g = mg = \rho_0 Vg$, kjer smo z ρ_0 označili gostoto svinca, ki jo preberemo iz tabele 11.1, V pa je prostornina krogle: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ki jo izračunamo iz podanega premera d ($R=d/2$). Dobimo $V = \frac{4}{3}\pi(0,1\text{ m})^3 = 4,2 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$.

Na kroglo pa deluje tudi vzgon (F_v), ki je enak teži izpodrinjene tekočine: $F_v = \rho_t Vg$, kjer je ρ_t gostota vode.

Rezultanta sil na kroglo je zato: $F = F_g - F_v$.

Če hočemo kroglo dvigniti, moramo torej premagati silo:

$$F = \rho_0 Vg - \rho_t Vg = (\rho_0 - \rho_t)Vg.$$

Dobimo:

$$F = (11,35 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 =$$

$$= 10,35 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 426 \text{ N}.$$

Za dvig te krogle potrebujemo torej silo 426 N.

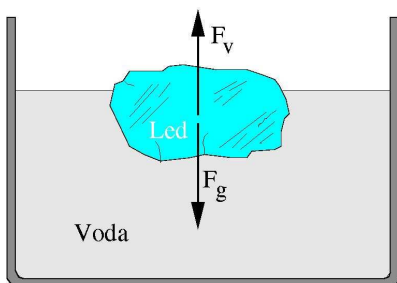


Kot smo videli na primeru, deluje na vsako potopljeno telo rezultanta dveh sil: teže in vzgona. Ta je

$$F = (\rho_0 - \rho_t)Vg,$$

kjer sta ρ_0 gostota telesa in ρ_t gostota tekočine. Telo je v tekočini vedno lažje ravno za toliko, kot je sila vzgona.

Kaj pa, kadar je gostota tekočine večja od gostote telesa? Tedaj je rezultanta sil na telo negativna. To pomeni, da ga rezultanta ne potopi na dno, ampak ga dvigne, in sicer toliko, da ostane samo del telesa potopljen v tekočini. Potopljen ostane natanko tolikšen del telesa, da je vzgon nasprotno enak teži telesa: $F_v = -F_g$. Ker plavajoče telo miruje v tekočini, namreč vemo, da je vsota vseh sil nanj enaka nič ($F = 0$).



Slika 11.6: Kos ledu plava v vodi

Primer 11.46

Izračunajmo, kolikšen del ledene kocke ostane potopljen v vodi (slika 11.6). Naj bosta temperaturi vode 4°C in ledu 0°C .

Iz tabele 11.1 ugotovimo, da je gostota ledu manjša od gostote vode. Led zato plava na vodi.

Vzgon je $F_v = \rho_t V_p g$, teža ledu pa $F_g = \rho_l V_0 g$, kjer smo z ρ_t označili gostoto tekočine, ρ_l je gostota ledu ter V_0 celotna prostornina ledu in V_p potopljena prostornina.

Ker je vzgon (F_v) nasprotno enak teži ledu (F_g), dobimo:

$$\rho_t V_p g = \rho_l V_0 g,$$

kar nam da

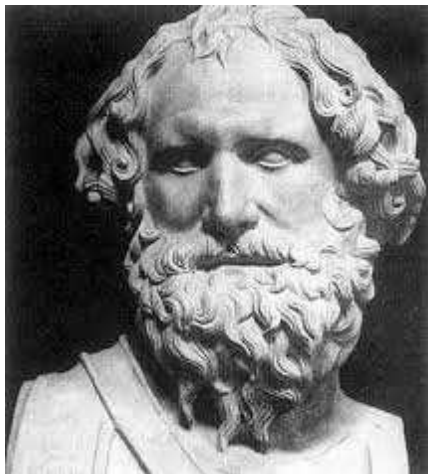
$$V_p = \frac{\rho_l}{\rho_t} V_0.$$

Za naš primer je $\frac{\rho_l}{\rho_t} = 0,917$, zato je $V_p = 0,917 V_0$.

Ugotovili smo torej, da je 0,917 ali 91,7 % prostornine ledu potopljene v vodo.

• • •

11.7 Arhimed iz Siracuse



Arhimed (Arhimedes) (287–212 pr. n. š.) je bil eden največjih znanstvenikov starega sveta. Pripisujejo mu izračun prostornine in površine krogle, izum in uporabo vzvodov, škripccev, zobatih koles in neskončnega vijaka ter seveda princip vzgona, ki mu danes pravimo Arhimedov princip. Večino svojega življenja je preživel v Sirakuzi, ki je bilo tedaj najpomembnejše mesto na Siciliji. S

svojimi napravami je pomagal braniti Sirakuzo pred Rimljani. Ko je ta grška kolonija končno podlegla rimski premoči, ga je, kljub drugačnim ukazom, ubil rimski vojak.

Izročilo pravi, da je sirakuški kralj Hieron II. prosil svojega učenega prijatelja Arhimeda, naj ugotovi, ali je krona, ki jo je pravkar dobil od zlatarja, res narejena iz čistega zlata. Ko je v kopalni kadi Arhimed razmišljal o tej nalogi, se je spomnil, da se je vsakorat, kadar je stopil v polno kad, nekaj vode razlilo preko roba. In domislil se je, da je prostornina te vode enaka prostornini potopljenega telesa. In ravno za težo te razlite, izpodrinjene vode postane potopljeno telo lažje. To spoznanje ga je baje tako navdušilo, da je stekel iz kopališča in po ulicah Sirakuze vpil, po grško seveda, "heureka". Pravijo, da je Arhimed nato potopil krono v vodo in izmeril, za koliko se je pri tem dvignila gladina vode. Nato je v vodo potopil še enako težko kepo zlata. Če bi bila krona iz zlata, bi bila tudi prostornina in s tem dvig vodne gladine, enaka. Izročilo še pove, da je bila prostornina krone večja, kot bi pričakovali za zlato, in da se s tem ni končala le zlatarjeva kariera, ampak tudi njegovo življenje.

Slika 11.7: Če hočemo povečati površino tekočine za dS , moramo na rob ℓ delovati s silo F , ki je odvisna od površinske napetosti tekočine.

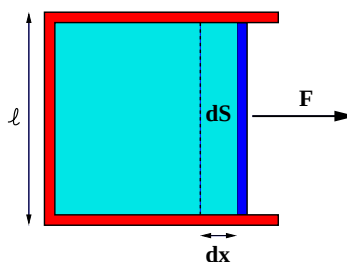


Tabela 11.2: Površinska napetost nekaterih tekočin v zraku in pri sobni temperaturi

Snov	Površinska napetost [N/m]
voda	0,073
glicerin	0,063
olivno olje	0,032
milnica	0,025
alkohol	0,022
kri 37 °C	0,058
krvna plazma 37 °C	0,073
živo srebro 20 °C	0,44

11.8 Površinska napetost

Med molekulami v tekočini delujejo medsebojne privlačne sile. Sile na posamično molekulo se v notranjosti tekočine v povprečju izravnavajo, rezultanta privlačnih sil na molekulo na površini pa je usmerjena v tekočino.

Pri povečanju površine tekočine je treba spraviti na površino nove molekule in za to opraviti delo. To delo (A) je sorazmerno številu molekul, ki smo jih dodatno spravili na površino, in je zato sorazmerno povečanju površine. Sorazmernostni koeficient med opravljenim delom in povečanjem površine (ΔS) je površinska napetost (σ):

$$A = \sigma \Delta S. \quad (11.5)$$

Enota za površinsko napetost je $\frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Zaradi opravljenega dela se tekočini poveča površinska potencialna energija (W_s) za

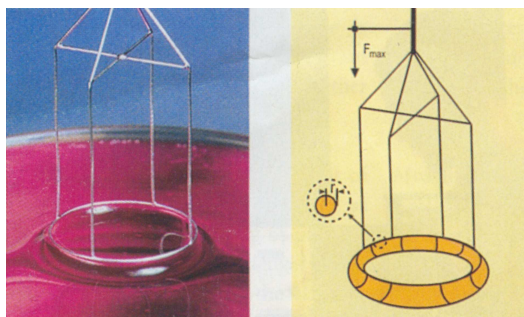
$$\Delta W_s = A = \sigma \Delta S. \quad (11.6)$$

Zato lahko površinsko potencialno energijo zapišemo kot:

$$W_s = \sigma S. \quad (11.7)$$

Površinska napetost torej podaja površinsko potencialno energijo na enoto površine.

Povezavo med silo, ki deluje na rob površine, in površinsko napetostjo, lahko razumemo s preprostim razmislekom. Predstavljamo si pravokotno površino. Za povečanje te površine v eni smeri moramo delovati z zunanjo silo, ki premaga



Slika 11.8: Merjenja površinske napetosti z zanko (Du Nouyeva metoda)

silo zaradi površinske napetosti. Ko se površina poveča za $dS = \ell dx$ (slika 11.7), opravi sila F delo Fdx , ki je enako spremembi površinske potencialne energije:

$$Fdx = \sigma dS = \sigma \ell dx. \quad (11.8)$$

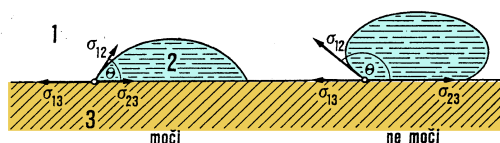
Sila zaradi površinske napetosti je torej enaka produktu površinske napetosti in dolžine roba, na katerega deluje:

$$F = \sigma \ell. \quad (11.9)$$

Površinska napetost (σ) tako podaja tudi silo zaradi površinske napetosti na enoto dolžine ($\sigma = \frac{F}{\ell}$).

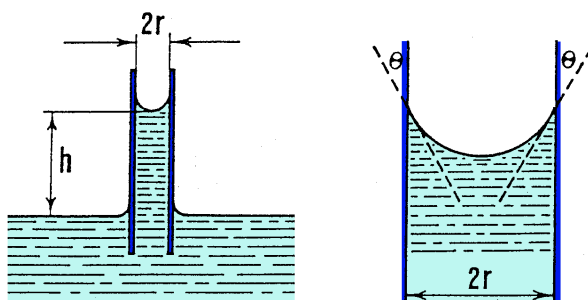
11.8.1 Merjenje površinske napetosti z zanko

Površinsko napetost tekočine lahko tudi neposredno izmerimo. Kovinsko zanko pomočimo v tekočino in jo nato počasi dvigamo (slika 11.8). Zaradi površinske napetosti površine tekočina v začetku sledi zanki in šele, ko silo dviganja dovolj povečamo, se zanka odtrga od tekočine. Ta dodatna sila pa je odvisna od površinske napetosti. Pri dviganju površino tekočine pretrgamo dvakrat: na zunanji in notranji strani oboda zanke. Ker je po navadi žica, iz katere je narejena zanka, zelo majhna, lahko privzamemo, da sta notranji in zunanji obseg skoraj enaka. Če je zanka okrogla, s polmerom R , je njen obseg $2\pi R$. Površino tekočine tako pretrgamo na razdalji $\ell = 4\pi R$. Za to pa potrebujemo silo $F = \sigma \ell$ (enačba 11.9). Če torej izmerimo dodatno silo za dvig zanke iz tekočine, lahko takoj dobimo velikost površinske napetosti $\sigma = F/4\pi R$. Tej metodi merjenja površinske napetosti pravimo Du Nouyeva metoda in je primerna predvsem za čiste tekočine in tekočine z malo primesmi, kjer se površinska napetost s časom le malo spreminja. Težava pri tej



Slika 11.9: Kapljica tekočine na trdni podlagi

Slika 11.10: Dvig tekočine v kapilari



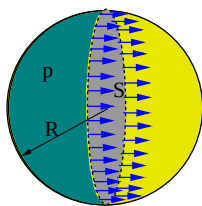
metodi je le v tem, da so sile zaradi površinske napetosti pogosto zelo majhne in jih je zato težko natančno izmeriti. Po navadi jih izmerimo tako, da zanko pritrdimo na vodoravno napeto žico, ki jo na drugi strani vrtimo. Žica je pri tem torzijsko obremenjena (glej stran 92) in deluje na zanko z navorom, ki je sorazmeren s kotom zasuka žice. Tako napravo imenujemo torzijska tehtnica.

11.8.2 Kapilarni dvig

Površinska napetost med plinom in tekočino je vedno pozitivna, kar pomeni, da dobi kapljica v plinu obliko krogle, če nanjo ne deluje nobena sila. Ko ima tekočina obliko krogle, je namreč njena stična površina s plinom najmanjša.

Če na gladki površini trdne snovi leži kapljica tekočine, imamo tri različne mejne površine (slika 11.9). Ko kapljica miruje, oklepa tangenta na gladino kapljice ob stiku s trdno snovjo kot močenja (ϑ). Ta kot je odvisen od površinskih napetosti med plinom in tekočino (σ_{12}), med tekočino in trdno snovjo (σ_{23}) in med plinom in trdno snovjo (σ_{13}). Na mejni črti prijemajo tri sile, od katerih je vsaka tangenta na ustrezno površino. Mejna črta miruje, zato mora biti vsota vseh sil enaka nič. To zahtevo zapišemo za smer, ki je vzporedna površini trdne snovi:

$$-\sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{12}\cos\vartheta = 0. \quad (11.10)$$



Slika 11.11: Sile na zračni mehurček v tekočini. Prikazane so samo sile, ki delujejo na levo polovico mehurčka.

Iz te enačbe sledi:

$$\cos\vartheta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}. \quad (11.11)$$

Kadar je površinska napetost med plinom in trdno snovjo (σ_{13}) večja od površinske napetosti med tekočino in trdno snovjo (σ_{23}), je trdna snov "raje" v stiku s tekočino, kot s plinom. Tedaj je $\cos\vartheta > 0$ in je kot močenja (ϑ) manjši od 90° . Pravimo, da tekočina moči površino trdne snovi. Če pa je $\sigma_{13} < \sigma_{23}$, je kot močenja večji od 90° ($\cos\vartheta < 0$) in taka tekočina površine trdne snovi ne moči.

Zaradi površinske napetosti pride do kapilarnega dviga. Če v posodo s tekočino pomočimo kapilaro, se bo v primeru, da tekočina moči ($\vartheta < 90^\circ$), gladina tekočine v kapilari dvignila nad gladino v posodi (slika 11.10). Potencialna energija vodnega stolpca se je tako res povečala, vendar pa se je pri tem zmanjšala površinska energija. Zaradi dviga se je namreč povečala stična ploskev med tekočino in trdno snovjo, za prav toliko pa se je zmanjšala površina med zrakom in trdno snovjo.

Velikost kapilarnega dviga (h) dobimo kot

$$h = \frac{2\sigma \cos\vartheta}{\rho g r}, \quad (11.12)$$

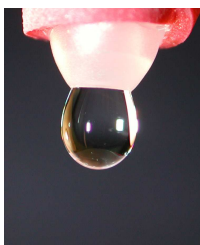
kjer smo, kot je navada, s σ označili površinsko napetost med tekočino in plinom.

Če kapilaro pomočimo v tekočino, ki stene ne moči ($\vartheta > 90^\circ$), lahko iz te enačbe ugotovimo, da se tekočina v kapilari spusti pod gladino tekočine v posodi ($h < 0$), saj je tedaj vrednost $\cos\vartheta$ negativna.

11.8.3 Kapljice in mehurčki

Mehurčki v osvežilnih pijačah, milni mehurčki, kapljice tekočine, vse to nastane zaradi površinske napetosti tekočine.

Oglejmo si zračni mehurček v tekočini. Na sliki 11.11 smo označili enega od možnih presekov mehurčka, ki razpolavlja mehurček. Če površina miruje, je vsaka polovica mehurčka v ravnovesju, tj. vsota vseh sil nanjo je nič. Katere sile pa delujejo na mehurček? Po vsej dolžini preseka delujejo sile zaradi površinske napetosti. Njihova vsota je $F_\sigma = \sigma\ell$, kjer je dolžina preseka $\ell = 2\pi R$. Poleg tega pa je v mehurčku za Δp večji tlak, kot zunaj njega. Ta razlika tlakov povzroča



Slika 11.12: Kapljica se odlepi od cevke, ko teža preseže silo površinske napetosti.

silo na površino mehurčka. Seveda je ta sila pravokotna na vsak posamezen del površine mehurčka. Vendar pa se izkaže, da se v polovici mehurčka vse navpične komponente izenačijo – ostane le vodoravna komponenta sile, ki je kar enaka sili zaradi tlaka na presek mehurčka: $F_p = \Delta p \pi R^2$.

Če nastane mehurček, v katerem je le malo povečan tlak, sila zaradi površinske napetosti prevlada in začne mehurček stiskati. Mehurček se manjša, pri tem pa se seveda manjša tudi prostornina zraka v njem, kar povzroči, da notranji tlak narašča. Mehurček se manjša vse dotlej, dokler se sili F_σ in F_p ne izenačita. V ravnovesju je zato

$$\sigma 2\pi R = \Delta p \pi R^2,$$

iz česar lahko izračunamo razliko tlakov:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Vidimo, da imajo manjši mehurčki večjo razliko tlakov, kar pomeni, da je pri enakem zunanjem tlaku tlak v manjših mehurčkih večji.

Popolnoma enako razmišljanje velja tudi za kapljice tekočine – v majhnih kapljicah so zelo veliki tlaki.

Primer 11.47

Izračunajmo, kolikšen je tlak v vodni kapljici z radijem 1 mm, če je zunanji tlak $p_z = 1$ bar.

Iz tabele 11.8 preberemo površinsko napetost vode ($\sigma = 0,073$ N/m) in izračunamo:

$$\Delta p = p_0 - p_z = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \cdot 0,073 \text{ N/m}}{10^{-3} \text{ m}} = 150 \text{ N/m}^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$$

Tlak v kapljici je za $1,5 \cdot 10^{-3}$ bar večji od zunanjega tlaka, zato je notranji tlak 1,0015 bar. Vidimo, da je ta razlika zelo majhna.

• • •

Primer 11.48

Kaj pa, če vodo razpršimo v zelo majhne kapljice, na primer s polmerom $0,1 \mu\text{m}$?

Dobimo:

$$\Delta p = p_0 - p_z = \frac{2 \cdot 0,073 \text{ N/m}}{10^{-7} \text{ m}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 15 \text{ bar},$$

kar nam da za tlak v kapljici: $p_0 = 16 \text{ bar}$. V majhnih kapljicah so ogromni tlaki!

• • •

Nastajanje kapljic lahko uporabimo tudi za merjenje površinske napetosti tekočine. Iz navpične cevke s polmerom R spuščamo kapljice (slika 11.12). Kdaj se kapljica odtrga od cevke? Nanjo deluje sila teže $F_g = \rho Vg$, ki poskuša kapljico odtrgati, navzgor pa jo zadržuje sila površinske napetosti $F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi R$. Kapljica se torej odtrga, ko se vanjo nateče toliko tekočine, da teža preseže silo F_σ . To se zgodi, ko je

$$\rho Vg = \sigma \cdot 2\pi R.$$

Če uspemo izmeriti prostornino kapljice (V), lahko iz tega takoj dobimo površinsko napetost tekočine:

$$\sigma = \frac{\rho Vg}{2\pi R}. \quad (11.13)$$

Ta metoda je primerna tudi za merjenje površinske napetosti med dvema tekočinama, ki se ne mešata (kot na primer olje v vodi). Obravnava je enaka, le da moramo pri ravnovesju sil upoštevati še vzgon.

Primer 11.49

Ugotovimo, kaj se bo dogajalo s kapljico vode na sliki 11.12, kjer je notranji premer cevke $1,6 \text{ mm}$.

Iz slike ocenimo premer kapljice kot $2r_k = 3 \text{ mm}$. Prostornino kapljice lahko izračunamo, če jo obravnavamo kot kroglo:

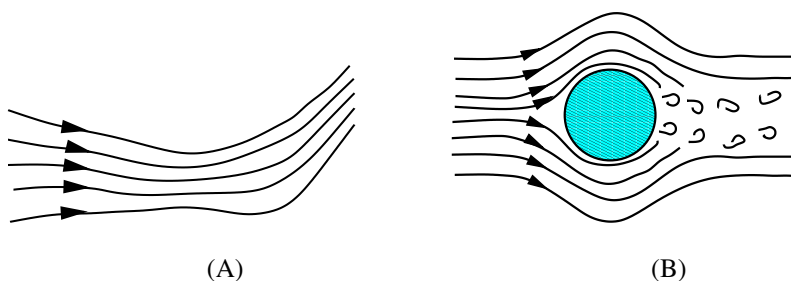
$$V = \frac{4}{3}\pi r_k^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1,5^3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3.$$

Teža kapljice bo zato: $F_g = \rho Vg = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot 10 \text{ ms}^{-2} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

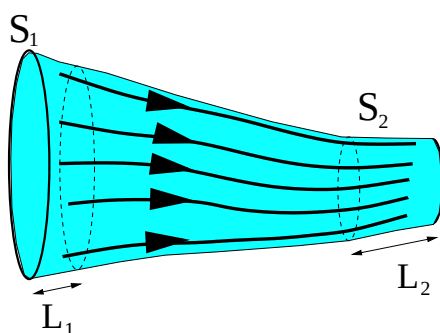
Sila površinske napetosti pa je $F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi R = 0,073 \text{ N/m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,7 \cdot 10^{-4}$.

Vidimo, da je teža kapljice približno osemkrat manjša od F_σ . Zato sklepamo, da se kapljica še ne bo odlepila od cevke, ampak bo še naprej rastla. Ker je prostornina odvisna od r_k^3 , lahko pričakujemo, da se bo premer kapljice dvakratno povečal, preden se bo odlepila.

• • •



Slika 11.13: Pri laminarnem toku (A) so tokovnice gladke, turbulenten tok (B) pa ima vrtnice.



Slika 11.14: Če se presek cevi zmanjša, se hitrost tekočine poveča.

11.9 Gibanje tekočin

V tem poglavju bomo spoznali osnove **hidrodinamike**, vede, ki proučuje gibajoče se tekočine. Zaradi enostavnosti se bomo najprej omejili na tekočine, ki so nestisljive – pri njih se gostota ne spreminja. Ta približek kar dobro velja za večino kapljev in tudi za pline, če se tlak le malo spreminja. Poleg tega bomo privzeli, da v tekočini ni notranjega trenja (viskoznosti – glej stran 185).

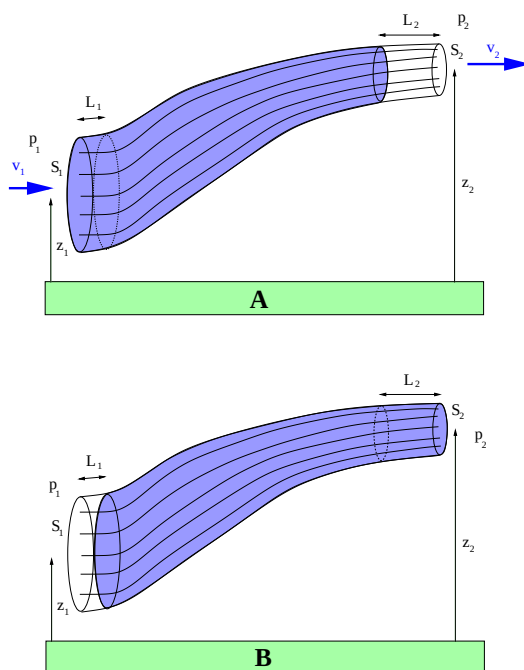
Gibanje delcev tekočine v toku lahko ponazorimo s tokovnicami (slika 11.13). Če je gibanje tekočine tako, da plasti tekočine gladko drse druga ob drugi in se tokovnice nikjer ne sekajo, ga imenujemo **laminaren** tok. Pogosto, predvsem pri večjih hitrostih, pa postane tok tekočine **turbulenten**. Ta je sestavljen iz večjih ali manjših vrtnicev, ki se s časom lahko tudi spreminjajo.

Oglejmo si sliko 11.14. Presek cevi se je zmanjšal z S_1 na S_2 . Kaj se zgodi? Skozi presek S_1 priteka tekočina s stalno hitrostjo v_1 . Vsak njen delec opravi v

času t pot $L_1 = v_1 \cdot t$. Zato v tem času preteče skozi ta del cevi prostornina $V_1 = S_1 \cdot L_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot t$. Skozi presek cevi S_2 pa v enakem času preteče $V_2 = S_2 \cdot v_2 \cdot t$ tekočine. Ker je tekočina nestisljiva, mora biti prostornina, ki preteče v enakem času skozi presek S_1 , enaka prostornini skozi S_2 . Torej je $V_1 = V_2$ in dobimo:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2. \quad (11.14)$$

Ta enačba nam pove, da se hitrost tekočine poveča, če se presek cevi zmanjša, in obratno.



Slika 11.15: Izpeljava Bernoullijeve enačbe: del tekočine se v danem času premakne iz začetnega stanja (A) v novo stanje (B)

Oglejmo si sedaj sliko 11.15. Tekočina teče po cevi od leve proti desni. V določenem času se je izbrani kos tekočine premaknil iz stanja, prikazanega zgoraj, v stanje na spodnji sliki. Če sta središči cevi na začetku in na koncu v različnih višinah (z_1 in z_2), se je pri premiku povečala potencialna energija izbranega dela tekočine:

$$W_p = mgz_2 - mgz_1,$$



Slika 11.16: Daniel Bernoulli (1700–1782), švicarski zdravnik, fizik in matematik. Bil je profesor anatomije in filozofije narave v Bernu. Med drugim se je ukvarjal tudi s študijem hidrodinamike.

kjer je m masa izbranega dela tekočine. Pri premiku se je spremenila tudi hitrost tekočine (od v_1 do v_2), kar je povzročilo spremembo kinetične energije za:

$$W_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Na obeh straneh opazovanega dela tekočine je lahko tudi različen tlak (p_1 in p_2). Tlak seveda v tekočini deluje v vse smeri enakomerno. Na površino S_1 deluje zato sila $S_1 \cdot p_1$, ki premakne ta del tekočine za L_1 . Pri tem opravi delo $A_1 = S_1 \cdot p_1 \cdot L_1$. Podobno izračunamo tudi delo zaradi tlaka na drugi strani: $A_2 = -S_2 \cdot p_2 \cdot L_2$. Z minusom smo označili dejstvo, da sila na desno ploskev deluje v obratni smeri kot na levo, in sicer v smeri, kjer zavira gibanje. Celotno opravljeno delo je zato

$$A = S_1 \cdot p_1 \cdot L_1 - S_2 \cdot p_2 \cdot L_2.$$

To delo pa je tisto, ki povzroči spremembo kinetične in potencialne energije. Zato je

$$A = W_p + W_k,$$

kar nam da ob upoštevanju dobljenih izrazov:

$$S_1 \cdot p_1 \cdot L_1 - S_2 \cdot p_2 \cdot L_2 = mgz_2 - mgz_1 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Če še enkrat pogledamo na sliko 11.15, ugotovimo, da je $S_1 \cdot L_1$ ravno prostornina (V) premaknjene tekočine. Ker je tekočina nestisljiva, mora biti ta prostornina enaka tudi $S_2 \cdot L_2$. Spomnimo se še, da je masa (m) premaknjene tekočine $m = \rho V$ (enačba 11.1), zato lahko zgornjo zvezo zapišemo:

$$p_1 \cdot V - p_2 \cdot V = \rho V g z_2 - \rho V g z_1 + \frac{1}{2}\rho V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho V v_1^2.$$

Delimo obe strani enačbe s prostornino (V). Enačbo nato še uredimo tako, da bodo količine, ki se nanašajo na levi del tekočine (indeks 1), na levi strani, količine z indeksom 2 pa na desni strani enačbe:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 \quad (11.15)$$

Dobili smo osnovno enačbo hidrodinamike, ki jo imenujemo **Bernoullijeva enačba** (po Danielu Bernoulliju, slika 11.16). Ta enačba nam pove, da je količina $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ na mestu, ki smo ga označili z 1, enaka tej količini na kateremkoli drugem mestu (označenem z 2). Zato lahko zapišemo Bernoullijevo enačbo tudi drugače:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{konstantno.} \quad (11.16)$$

Prvo spoznanje, ki sledi iz te enačbe, je zelo nepričakovano: vidimo, da večja hitrost povzroči manjši tlak tekočine, ki teče na enaki višini.

Oglejmo si nekaj primerov uporabe Bernoullijeve enačbe.

Primer 11.50

Izračunajmo, s kolikšno hitrostjo izteka voda iz pipe v spodnji levi hiši na sliki 11.4 (stran 168), če je gladina vode v stolpu 30 m višja od vodovodne pipe.

Označimo vodno gladino v stolpu z "1" in vodo, ki teče iz pipe z "2". V vodnem stolpu je veliko vode, zato se gladina skoraj nič ne premakne, ko odpremo pipo v hiši – zato je $v_1 = 0$. Tlaka nad tekočino v stolpu in v hiši sta enaka ($p_1 = p_2$). Od enačbe 11.15 nam zato ostane samo:

$$\rho g z_1 - \rho g z_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

kjer sta z_1 in z_2 višini stolpa in hiše. Iz tega dobimo hitrost iztekanja vode

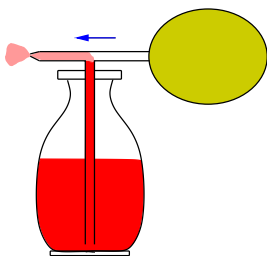
$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}.$$

Opazimo, da voda izteka z natančno takšno hitrostjo, kot bi jo imel katerikoli predmet, ki bi prosto padel za enako višino.

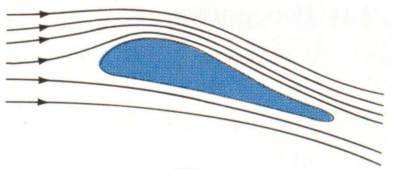
Naši podatki torej pokažejo, da voda izteka s hitrostjo:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m}} = \sqrt{589 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 24 \text{ m/s}.$$

• • •



Slika 11.17: Pršilnik deluje tako, da s stiskom elastične krogle ustvarimo tok zraka v vodoravni cevi. Nad ustjem navpične cevi je hitrost zraka velika in zato majhen tlak. Zračni tlak nad tekočino v posodi zato potisne tekočino po cevi navzgor do vodoravne cevke, kjer jo tok zraka potisne skozi pršilno šobo.



Slika 11.18: Letalsko krilo je oblikovano tako, da je hitrost zraka na zgornji ploskvi večja kot na spodnji. Zato je tlak zgoraj manjši, kot spodaj:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2).$$

Ta razlika tlakov povzroči silo navzgor na krilo, ki je glavni razlog, da letalo ostane v zraku. To silo imenujemo tudi dinamični vzgon.

Primer 11.51

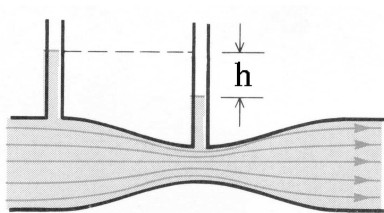
Slika 11.19 prikazuje Venturijevo cev. To je cev, ki se na sredini zoži. Navpično navzgor iz nje vodita dve cevi. Višina tekočine v ceveh je odvisna od tlaka v glavni cevi. Ker je na ožjem delu cevi hitrost večja, je zato tam tlak manjši, kot na širšem delu. Ta razlika tlakov je ravno enaka razliki višin v dveh navpičnih ceveh: $p_1 - p_2 = \rho gh$.

Če poznamo preseke cevi, lahko iz razlike višin h določimo hitrost tekočine in s tem tudi pretok.

Po Bernoullijevi enačbi je: $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$.

Če iz enačbe 11.14 izrazimo $v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$, dobimo:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right) = \rho gh,$$



Slika 11.19: Venturijevo cev se uporablja za merjenje hitrosti in pretokov tekočin.



Slika 11.20: Curek vode, ki izteka iz vodovodne pipe se oži, ker hitrost vode narašča.

kar nam da za hitrost v širšem delu cevi:

$$v_1^2 = \frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}.$$

Pretok tekočine (Φ_v) je prostornina, ki se pretoči v časovni enoti (glej tudi enačbo 11.19 na strani 188). Če poznamo presek cevi in hitrost tekočine, lahko pretok enostavno izračunamo:

$$\Phi_v = \frac{V}{t} = \frac{S_1 v_1 t}{t} = S_1 v_1.$$

Pri tem smo seveda privzeli, da se hitrost ne spreminja in je po vsem preseku cevi enaka.

• • •

Primer 11.52

Najbrž smo že opazili, da se curek vode iz vodovodne pipe oži (slika 11.20). Ali lahko sedaj to razumemo?

Če voda izteka iz pipe s hitrostjo v_1 v višini z_1 , se z oddaljenostjo od pipe $z_1 - z_2$ hitrost vode (v_2) povečuje. Napišimo Bernoullijevo enačbo:

$$\frac{1}{2}\rho V v_2^2 = \rho V g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\rho V v_1^2.$$

Iz tega dobimo za hitrost vodnega curka: $v_2^2 = v_1^2 + 2g(z_1 - z_2)$.

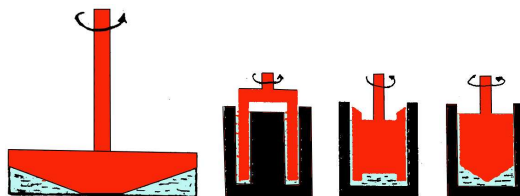
Ker se hitrost curka povečuje, se njegov presek (S_2) zmanjšuje. Enačba 11.14 nam da

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot v_1}{v_2} = \frac{S_1 \cdot v_1}{\sqrt{v_1^2 + 2g(z_1 - z_2)}} = S_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g(z_1 - z_2)}{v_1^2}}},$$

kjer je S_1 začetni presek vodnega curka.

• • •

Slika 11.21: Različne oblike vrtečih valjev za merjenje koeficienta viskoznosti z rotacijskim viskozimetrom



11.10 Viskoznost

Tekočine se upirajo pretakanju. Zaradi privlačne sile med molekulami pride do trenja med sosednjimi plastmi tekočine. To notranje trenje imenujemo viskoznost. Kadar se dve sosednji plasti tekočine gibljeta z enako hitrostjo, med njima seveda ni sile trenja, saj plasti medsebojno mirujeta. Pričakujemo, da je sila trenja med dvema plastema tekočine sorazmerna razliki hitrosti plasti (dv) in obratno sorazmerna njuni oddaljenosti (dx). Prav tako mora biti sorazmerna tudi velikosti stične ploskve med plastema (S). Zato jo lahko zapišemo kot:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}. \quad (11.17)$$

Sorazmernostni faktor η imenujemo koeficient viskoznosti in ga merimo v enotah $\frac{\text{kg}}{\text{ms}}$ ali $\text{Pa} \cdot \text{s}$ (pascal sekunda). Starejša enota je poise (P), ki jo še vedno srečujemo – najpogosteje kot centipoise (cP).

$$1 \text{ mPa s} = 10^{-3} \text{ Pa s} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}} = 10^{-2} \text{ P} = 1 \text{ cP}.$$

Nekaj tipičnih vrednosti koeficienta viskoznosti je podanih v tabeli (11.3).

Naprave za merjenje viskoznosti imenujemo viskozimetre. Delujejo lahko na principu merjenja časa, potrebnega za pretočitev dane prostornine tekočine iz više ležeče posodice skozi kapilaro v drugo posodico. To so kapilarni viskozimetri (slika 11.23). Druga vrsta viskozimetrov pa temelji na merjenju hitrosti padanja kroglice v viskozni tekočini. Poleg tega pa lahko uporabljamo tudi rotacijske viskozimetre. Tu merimo silo, ki je potrebna, da se valj določene oblike vrti v viskozni tekočini (slika 11.21).

11.10.1 Turbulenca in Reynoldsovo število

Oglejmo si tok viskozne tekočine po cevi. Dokler je hitrost tekočine majhna, je tok laminaren (slika 11.13), če pa hitrost povečamo, se začno pojavljati vrtinci – tok postane turbulenten. Z dolgotrajnim poskušanjem je Osborne Reynolds ugotovil, da lahko dosežemo nastanek turbulence tudi s povečanjem premera cevi, povečanjem gostote ali zmanjšanjem viskoznosti tekočine. In vsaka od teh sprememb je

Tabela 11.3: Koeficient viskoznosti nekaterih tekočin pri 18 °C

Snov	Viskoznost (mPa s)
glicerol	1392
motorno olje(SAE 10)	200
olivno olje	90
kri (37 °C)	≈3
krvna plazma	1,75
alkohol	1,22
voda	1,1
zrak	0,013

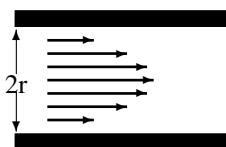
enako učinkovita. Vpeljal je število, ki ga danes imenujemo Reynoldsovo število:

$$Re = \frac{\rho \ell v}{\eta}, \quad (11.18)$$

kjer je ρ gostota tekočine, η njena viskoznost, v povprečna hitrost in ℓ premer cevi.

Reynoldsovo število nima enote. Kadar je viskoznost tekočine majhna, je to število veliko. Posamezne plasti tekočine med seboj tedaj le malo sodelujejo in lahko nastajajo vrtinci. Pri majhnih vrednostih Re pa igra viskoznost pri pretakanju tekočine zelo pomembno vlogo. Tedaj so sile med posameznimi plastimi tekočine velike in tekočina se giblje kot celota; vse lokalne nepravilnosti zaradi viskozne sile hitro izginejo. Ugotovili so, da je mejna vrednost Reynoldsovega števila okoli 2000. Če je Re večje od 2000, potem je tok turbulenten, pri majhnih vrednostih Re pa je laminaren. Reynoldsovo število je pomembno tudi zato, ker so ugotovili, da se tekočina obnaša podobno v vseh primerih, ko so vrednosti Re enake. To sicer velja predvsem za pretakanje tekočine skozi cevi, uporabno pa je tudi za druge, bolj zapletene primere. Tedaj nam ℓ pomeni tipično dimenzijo sistema, kot je na primer povprečni premer predmeta, ki se giblje v tekočini. Če želimo na primer proučiti gibanje letala v zraku, lahko naredimo model. Toda, če je model na primer 100-krat manjši od pravega letala, ga moramo proučevati pri 100-krat večjih hitrostih, kot naj bi jih doseglo letalo. Le tako bo Reynoldsovo število modela enako kot pri pravem letalu in s tem tudi njegove hidrodinamske lastnosti.

Primer 11.53



Slika 11.22: Profil hitrosti viskozne tekočine pri pretakanju skozi cev

Izračunajmo, kolikšno je Reynoldsovo število za bakterijo s premerom $1\ \mu\text{m}$, ki plava v vodi s hitrostjo $0,01\ \text{mm/s}$.

V enačbo 11.18 vstavimo podatke za gostoto vode ($\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$), njeno viskoznost ($\eta = 1,1 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-2}\text{s} = 1,1 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$), hitrost ($v = 10^{-5}\ \text{ms}^{-1}$), tipično dimenzijo ($\ell = 10^{-6}\ \text{m}$) in dobimo:

$$\text{Re} = \frac{\rho \ell v}{\eta} = \frac{10^3\ \text{kgm}^{-3} \cdot 10^{-6}\ \text{m} \cdot 10^{-5}\ \text{ms}^{-1}}{1,1 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}} = 0,9 \cdot 10^{-5}.$$

Ker je Reynoldsovo število zelo majhno, sklepamo, da je tok vode okoli take bakterije laminaren.

• • •

Primer 11.54

Kaj pa, če bi desetmetrski kit plaval s hitrostjo $10\ \text{m/s}$? Kolikšno bi bilo Reynoldsovo število?

Podobno kot v prejšnjem primeru dobimo:

$$\text{Re} = \frac{\rho \ell v}{\eta} = \frac{10^3\ \text{kgm}^{-3} \cdot 10\ \text{m} \cdot 10\ \text{ms}^{-1}}{1,1 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}} = 0,9 \cdot 10^8.$$

Tok okoli kita je zato zelo turbulenten.

Ta primer nam je pokazal, da je Reynoldsovo število za kita približno 10^{13} -krat večje, kot za bakterijo. To pomeni, da je tok okoli bakterije tak, kot bi bil okoli kita, ki bi plaval v zelo, zelo viskozni tekočini – 10^{13} -krat bolj viskozni od vode!

• • •

Iz teh dveh primerov smo spoznali, da imamo v naravi zelo velik razpon Reynoldsovih števil. Za hidrodinamske lastnosti je namreč pomemben produkt velikosti in hitrosti (enačba 11.18). Ker pa velika bitja po navadi plavajo (ali letijo) hitreje kot majhna, je zato pri njih Reynoldsovo število lahko zelo veliko.

11.10.2 Tok viskozne tekočine v cevi

Po vsem, kar smo se do sedaj naučili, pričakujemo, da se plasti tekočine medsebojno lepijo. Vsak delček tekočine, ki se giblje, vleče s seboj sosednje delčke. Tekočina se zato upira pretakanju – je viskozna.

Zelo nepričakovano pa pride spoznanje, da se viskozne tekočine popolnoma lepijo na trdne snovi. Plast tekočine ob trdni snovi ima namreč vedno enako hitrost kot trdna snov. Če na primer teče voda preko trdne snovi, tanka plast vode ob trdni snovi vedno miruje. In to ni odvisno niti od vrste trdne snovi niti od njene oblike ali hrapavosti. Zato so krpe ali trdni delci v vodi dosti bolj učinkoviti za čiščenje, kot samo spiranje z vodo. In zato imamo lahko težave z nalaganjem oblog v žilah, namesto da bi se žile obrabljale.

Hitrost viskozne tekočine zato po preseku cevi ne bo konstantna. Pri laminarnem pretakanju viskozne tekočine po tanki valjasti cevi tekočina tik ob steni miruje, nato hitrost posameznih plasti od stene proti sredini cevi narašča in je v sredini največja (slika 11.22). Odvisnost hitrosti od oddaljenosti od sredine cevi je kvadratna. Volumski pretok (Φ_v) skozi cev je prostornina tekočine, ki se pretoči skozi cev v danem času:

$$\Phi_v = \frac{dV}{dt}. \quad (11.19)$$

Enota zanj je m^3/s .

Pri pretakanju viskozne tekočine skozi cev s polmerom r je volumski pretok

$$\Phi_v = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell}, \quad (11.20)$$

kjer je η koeficient viskoznosti, ℓ dolžina cevi in Δp tlačna razlika med začetkom in koncem cevi. Tej enačbi pravimo **Poiseuillejev zakon**. Imenuje se po francoskem znanstveniku J.L.M. Poisseuillu (1799–1869) (izg. pwasěj), ki se je ukvarjal predvsem s proučevanjem fizike krvnega obtoka. Po njem je dobila ime tudi enota za viskoznost "poise".

Poiseuillejev zakon nam pove, da je za vsak pretok viskozne tekočine po cevi potrebna določena razlika tlakov. Pomembno je, da je pretok sorazmeren s polmerom cevi na četrto potenco. Zato lahko že majhne spremembe polmera cevi bistveno spremenijo pretok. Čeprav kri ni povsem nestisljiva tekočina s konstantno viskoznostjo, saj vsebuje tudi precej velikih delcev in njen tok ni brez vrtincev, pa Poiseuillejev zakon vseeno smiselno opisuje njen pretok. Prav zaradi odvisnosti r^4 lahko človeško telo učinkovito nadzoruje pretok krvi z majhnim stiskanjem arterij. Drugi učinek Poiseuillejevega zakona pa se pokaže pri zmanjšanju odprtine žile zaradi arterioskleroze in nalaganja holesterola. Tedaj mora srce močno povečati tlak, če naj pretok krvi ostane kolikor toliko nespremenjen. Če bi se na primer premer žile zmanjšal na polovico, bi moralo srce povečati tlak 16-krat (ker

je $2^4 = 16$), da se pretok krvi ne bi spremenil. Veliko povečanje krvnega tlaka lahko pomeni tako veliko obremenitev srca, da je to ne zmore in se zato pretok krvi skozi žilo zmanjša. Zato je povečan krvni tlak navadno znak, da je srce bolj obremenjeno in da je hkrati pretok krvi zmanjšan.

11.10.3 Upor tekočine

V tem poglavju si bomo ogledali, kaj se dogaja, kadar se predmet giblje skozi viskozno tekočino. Kot smo videli na strani 188, plast tekočine tik ob trdni snovi vedno miruje, neodvisno od vrste tekočine ali trdne snovi. Vsak predmet, ki se giblje skozi viskozno tekočino, zato ob sebi vleče plast tekočine. Ta pa se zaradi viskoznosti "tare" ob sosednje plasti. Rezultat tega je, da viskozna tekočina zavira gibanje predmetov, kar imenujemo upor tekočine.

Ker je sila zaradi viskoznosti odvisna od hitrosti (glej en. 11.17), pričakujemo, da bo tudi sila upora odvisna od nje. Za majhne hitrosti zato velja:

$$F_u = K_u v, \quad (11.21)$$

kjer je K_u koeficient upora, ki je odvisen od velikosti in oblike gibajočega se predmeta. Za kroglo je na primer $K_u = 6\pi r\eta$. Zato je sila upora tekočine na kroglo, če so hitrosti majhne:

$$F_u = 6\pi r\eta v. \quad (11.22)$$

To zvezo imenujemo **Stokesova enačba**.

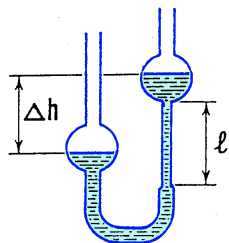
Spoznanje, da je upor tekočine sorazmeren hitrosti gibanja, ima zanimivo posledico za predmete, ki padajo. Na začetku, ko je hitrost padajočega predmeta majhna, je tudi upor sredstva majhen. Z večanjem hitrosti pa upor narašča, zato je rezultanta sil, ki delujejo na telo, vse manjša. Hitrost vse počasneje narašča (pospešek je vse manjši) in se približuje neki končni hitrosti, kjer sila upora ravno uravnovesi silo teže: $v_k = gm/K_u$. Kako se hitrost padajočega telesa spreminja s časom, si lahko ogledamo v poglavju 11.10.6.

Linearna zveza med silo upora in hitrostjo gibajočega predmeta (enačba 11.21) velja le, dokler je tok tekočine okoli teles laminaren – to je predvsem pri majhnih hitrostih, ko je Reynoldsovo število majhno. Kadar pa postane tok tekočine turbulenten (pri $Re > 2000$), je sila upora odvisna od kvadrata hitrosti. Tako silo imenujemo dinamični upor (F_d) in jo lahko zapišemo:

$$F_d = \frac{1}{2} C_u S \rho v^2, \quad (11.23)$$

kjer je S površina prečnega prereza telesa, ρ gostota tekočine, v hitrost gibanja telesa in C_u koeficient upora, ki je odvisen predvsem od oblike telesa. Tako je $C_u = 1,1$ za okroglo ploščo in $0,04$ za ribji profil. V praksi je koeficient upora lastnost

Slika 11.23: Določanje koeficienta viskoznosti s kapilarnim viskozimetrom



telesa in je parameter, ki ga za vsak posamezni primer izmerimo – čim manjša je njegova vrednost, tem manjši je upor tekočine. C_u je na primer pomemben parameter pri nakupu avtomobila, saj njegova večja vrednost pomeni večji upor zraka in zato večjo porabo goriva, kar se pozna predvsem pri večjih hitrostih, saj upor narašča s kvadratom hitrosti.

11.10.4 Določanje koeficienta viskoznosti s kapilarnim viskozimetrom

Pri pretakanju tekočine v kapilarnem (Ostwaldovem) viskozimetru (slika 11.23) teče tekočina iz zgornje posodice v spodnjo zaradi sile teže. Tok poganja razlika hidrostatskih tlakov, ki je

$$\Delta p = \rho g \Delta h, \quad (11.24)$$

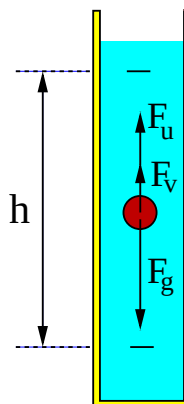
kjer je Δh razlika v višini stolpcev tekočine, ρ gostota tekočine in g gravitacijski pospešek. Razlika v višini stolpcev tekočine Δh ves čas pretakanja sicer ni enaka, vendar pa je v našem primeru njeno spreminjanje med pretakanjem dovolj majhno, da ga lahko zanemarimo. Zato je tudi volumski pretok (Φ_v) konstanten in je v danem času (t) pretočena prostornina tekočine $V = \Phi_v t$. Če upoštevamo enačbi (11.20) in (11.24), lahko to enačbo napišemo:

$$V = \frac{\pi r^4 \rho g \Delta h}{8 \eta \ell} t. \quad (11.25)$$

Torej je prostornina v danem času pretočene tekočine premo sorazmerna njeni gostoti in obratno sorazmerna viskoznosti. Na sliki 11.23 smo z ℓ označili le dolžino ozkega (kapilarnega) dela viskozimetra, saj predvsem ta del bistveno vpliva na pretok.

Izmerimo čas t_1 , v katerem preteče skozi viskozimeter volumen tekočine V , katere gostoto ρ_1 in koeficient viskoznosti η_1 poznamo, ter čas t , v katerem preteče skozi viskozimeter enak volumen tekočine, katere gostoto ρ poznamo, njen koeficient viskoznosti η pa želimo določiti. Če enačbo (11.25) zapišemo za obe snovi in

Slika 11.24: Določanje koeficienta viskoznosti z merjenjem hitrosti padanja kroglice v tekočini



ti dve enačbi izenačimo, dobimo:

$$\eta = \frac{\eta_1 \rho t}{\rho_1 t_1}. \quad (11.26)$$

11.10.5 Določanje koeficienta viskoznosti z merjenjem hitrosti padanja kroglice v tekočini

V valjasto posodo, napolnjeno s tekočino, katere viskoznost želimo določiti, spustimo kroglico in izmerimo hitrost njenega padanja (slika 11.24).

Na kroglico v tekočini delujejo tri sile: teža (F_g), vzgon (F_v) in sila zaradi upora tekočine (F_u – glej poglavje 11.10.3, stran 189):

$$F_g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_s g, \quad F_v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g, \quad F_u = 6 \pi r \eta v, \quad (11.27)$$

kjer je ρ_s gostota snovi, iz katere je kroglica, ρ_0 gostota tekočine, r polmer kroglice, η koeficient viskoznosti tekočine, v kateri pada kroglica, in v hitrost padanja kroglice. Za upor viskozne tekočine smo uporabili Stokesovo enačbo (en. 11.22).

Ko kroglico spustimo v tekočino, se začne gibati pospešeno in njena hitrost narašča. Ker pa je upor tekočine sorazmeren hitrosti, se tudi ta sila povečuje. Približuje se vrednosti, ko je enaka razliki teže in vzgona:

$$F_u = F_g - F_v. \quad (11.28)$$

Če uporabimo še izraze za težo, vzgon in upor, dobimo:

$$6 \pi r \eta v = \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_s - \rho_0). \quad (11.29)$$

Iz te enačbe izrazimo koeficient viskoznosti

$$\eta = \frac{2(\rho_s - \rho_0)r^2g}{9v}. \quad (11.30)$$

Hitrost padanja kroglice določimo tako, da merimo čas t , v katerem pade kroglica za h (slika 11.24): $v = \frac{h}{t}$.

11.10.6 Dodatek: izračun hitrosti padanja v sredstvu

Kot primer lepe matematične izpeljave časovne odvisnosti gibanja telesa si bomo ogledali, kako se spreminja hitrost padanja v sredstvu.

Sila, ki deluje na padajoče telo, je $F = mg - K_u v$. Telo zato doseže največjo hitrost $v_{\max}$, kadar je $F = 0$, iz česar sledi: $v_{\max} = g \frac{m}{K_u}$. Zaradi enostavnejšega zapisa vpeljimo novo spremenljivko $\alpha = \frac{K_u}{m}$, kar nam da $v_{\max} = \frac{g}{\alpha}$.

Iz drugega Newtonovega zakona dobimo:

$$F = ma = mg - K_u v.$$

Pospešek (a) je zato $a = g - \alpha v$.

Ker je pospešek sprememba hitrosti v časa ($a = dv/dt$), velja:

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v,$$

iz česar lahko izračunamo čas (t) z integriranjem:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{(g - \alpha v)}$$

Meje integrala smo izbrali od začetne hitrosti (pri $t = 0$), ki je nič, do neke hitrosti v po času t .

Ta integral lahko enostavno izračunamo, če vpeljemo novo spremenljivko: $x = g - \alpha v$. Iz tega dobimo za odvod $\frac{dx}{dv} = -\alpha$ oziroma $dv = -\alpha dx$. Če to vstavimo v gornji integral, dobimo:

$$t = -\frac{1}{\alpha} \int_g^{(g-\alpha v)} \frac{dx}{x}.$$

Ker smo zamenjali spremenljivko, smo morali zamenjati tudi meje integriranja; ko je hitrost nič, je $x = g$, pri hitrosti v pa je $x = g - \alpha v$.

Ker je $\int \frac{dx}{x} = \ln x$, dobimo ob upoštevanju integracijskih mej:

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{g - \alpha v}{g},$$

iz česar lahko izrazimo hitrost:

$$v = \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \quad (11.31)$$

Hitrost se torej eksponentno približuje končni hitrosti $v_{\max} = \frac{g}{\alpha}$.

Ko poznamo časovno odvisnost hitrosti, lahko enostavno dobimo pospešek z odvajanjem:

$$a = \frac{dv}{dt} = ge^{-\alpha t}. \quad (11.32)$$

Na začetku (pri $t = 0$) je pospešek enak težnostnemu pospešku, potem pa se eksponentno zmanjšuje proti nič.

Tudi razdaljo (s), ki jo opravi padajoči predmet, lahko izračunamo. Ker je hitrost $v = \frac{ds}{dt}$, je:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{g}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha t}) dt = \frac{g}{\alpha} \int_0^t dt - \frac{g}{\alpha} \int_0^t e^{-\alpha t} dt.$$

Ker je $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$ in $\int e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$, dobimo:

$$s = \frac{gt}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} - 1),$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$s = \frac{gt}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}). \quad (11.33)$$

Vidimo, da je padanje v tekočini odvisno od parametra α , ki podaja razmerje med koeficientom upora (K_u) in maso padajočega predmeta.

Kadar imamo eksponentno odvisnost, kot na primer v enačbi 11.32, je primerno definirati razpolovni čas – to je čas, v katerem se količina zmanjša na polovico. Iz enačbe 11.32 ugotovimo, da je na začetku (pri $t = 0$) $a = g$. Zato se pospešek zmanjša na polovico v času T , ko je:

$$a = \frac{g}{2} = ge^{-\alpha T},$$

kar nam da za razpolovni čas

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{m}{K_u} \ln 2, \quad (11.34)$$

kjer je $\ln$ naravni logaritem ($\ln 2 = 0,6931$).

11.11 Povzetek

Gostota (ρ) je masa (m) na enoto prostornine (V): $\rho = \frac{m}{V}$.

Mera za tlak (p) je sila (F), ki deluje pravokotno na površinsko enoto (S) $p = \frac{F}{S}$.

Pascalov princip: tlak na tekočino v posodi se prenese po vsej tekočini.

Hidrostatika:

Hidrostatični tlak: $p = \rho gh$,

kjer je ρ gostota tekočine, g težnostni pospešek in h globina v tekočini.

Vzgon je sila na telo v tekočini, ki je po smeri nasprotno enaka sili teže.

Arhimedov princip: vzgon je po velikosti enak teži izpodrinjene tekočine.

Rezultanta sil (F) na potopljeno telo: $F = (\rho_0 - \rho_t)Vg$,

kjer je ρ_0 gostota telesa, ρ_t gostota tekočine, V prostornina telesa.

Površinska napetost: $\sigma = F/\ell$,

kjer je F sila na rob dolžine ℓ .

Hidrodinamika:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2.$$

Bernoullijeva enačba: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{konstantno}$.

Viskoznost: $F = \eta S \frac{dv}{dx}$

η - koeficient viskoznosti.

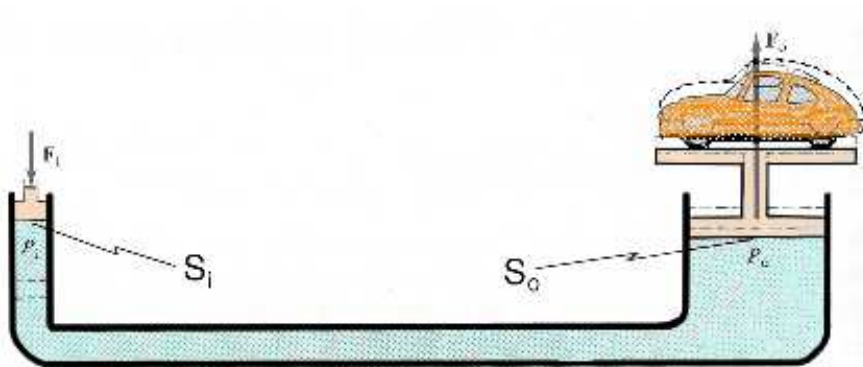
Reynoldsovo število $Re = \frac{\rho \ell v}{\eta}$,

kjer je η koeficient viskoznosti, ρ gostota tekočine, v povprečna hitrost, ℓ tipična dimenzija.

Upor tekočine: $F_u = K_u v$

K_u koeficient upora

za kroglo: $F_u = 6\pi\eta r v$ (Stokesova enačba).



Slika 11.25: Princip delovanja hidravličnega dvigala

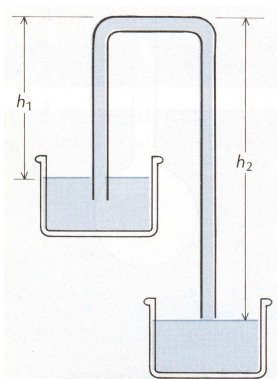
11.12 Vprašanja

1. Če pritisnemo na bat glavnega valja avtomobilske zavore (slika 11.2) s silo 50 N, kolikšna bo sila na kolesni bat, če je premer glavnega bata 0,5 cm in kolesnega bata 1,5 cm?
2. Ogledaj si sliko avtomobilske zavore na sliki 11.2 in pojasni, kakšne vrste je vzvod zavornega pedala.
3. Slika 11.25 prikazuje hidravlično dvigalo. Če je premer desnega bata $R_o = 5$ cm, kolikšen mora biti premer levega bata (R_i), da bomo lahko s silo $F_i = 10$ N dvignili avto z maso 1500 kg?
4. Pojasni, kako nastane hidrostatski tlak.
5. Ali je hidrostatski tlak v podvodni votlini drugačen kot zunaj nje? Zakaj?
6. Izračunaj, kolikšen je hidrostatski tlak v jezeru, v globini 30 m.
7. Kolikšen tlak deluje na potapljača v jezeru v globini 30 m?
8. Ali je hidrostatski tlak enak v enaki globini v morski in sladki vodi? (Glej tabelo 11.1.)
9. Če je na sliki 11.4 (stran 168) gladina vode v stolpu 30 m višja od vodovodne pipe v spodnji hiši levo, kolikšen je tlak vode v tej pipi?
10. Ali je vodni tlak enak v vseh hišah v vasi na sliki 11.4?



Slika 11.26: Vodni stolp s preprosto napravo za merjenje količine vode

11. Slika 11.26 prikazuje vodni stolp v ravninskem predelu Azije. Če je njegova višina 15 m, kolikšen je vodni tlak na tleh?
12. Desna slika 11.26 prikazuje preprosto napravo za merjenje količine vode na principu plovca. Ali lahko pojasniš, kako deluje?
13. Slika 11.27 prikazuje princip natege, ki jo uporabljamo za pretakanje tekočin. Razmisli, kaj poganja tekočino po cevi. Ali obstajajo kakšne omejitve za višino h_2 ?
14. S pomočjo literature ugotovi, kako se spreminja zračni tlak z višino?
15. Za primer na strani 170 izračunaj, kolikšno silo potrebujemo, da dvignemo to kroglo v zraku.
16. Za primer na strani 170 izračunaj, kolikšno silo potrebujemo, da dvignemo to kroglo v morski, namesto v jezerski vodi. Kaj povzroči razliko?
17. Leseno kocko s stranico 10 cm položiš v vodo. Zakaj plava? Izračunaj, kolikšen del kocke je potopljen v vodi. Pomagaj si s tabelo gostote snovi 11.1.



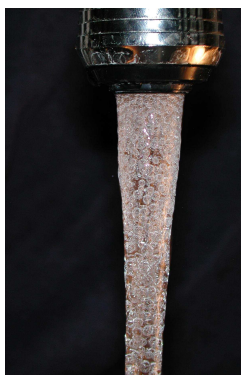
Slika 11.27: Princip natege, ki jo uporabljamo za pretakanje tekočin

18. Podobno kot na strani 171 izračunaj, kolikšen del ledene gore plava nad površino morja. Za gostoti ledu in morja uporabi kar tabelo 11.1.
19. Ali lahko šivanka plava na vodi? Zakaj?
20. Nekatere žuželke lahko hodijo in se drsajo po vodni površini. Zakaj?
21. Kje v vsakdanjem življenju opaziš kapilarni dvig tekočine?
22. Izračunaj, kolikšna je površinska napetost tekočine, če se kapljica odtrga od kapilare s premerom 1,5 mm, ko doseže velikost $2r_k = 5$ mm (slika 11.12).
23. Na strani 178 smo izpeljali zvezo med površinsko napetostjo in velikostjo kapljice v zraku. Naredi to izpeljavo še za primer, ko spuščáš kapljice ene tekočine v drugi tekočini. Pokaži, da je tedaj

$$\sigma = \frac{(\rho_1 - \rho_2)Vg}{2\pi R},$$

kjer sta ρ_1 in ρ_2 gostoti obeh tekočin.

24. Slika 11.28 prikazuje tok vode, posnet z zelo kratkim časom. Vidimo, da se v cevi vodi primešajo zračni mehurčki, ki nato z vodo potujejo navzdol. Opazimo tudi, da so zračni mehurčki pri izhodu iz cevi majhni, nato pa naraščajo. Ali lahko to pojasniš s tem, da je tlak vode v cevi veliko večji, kot je zunanji zračni tlak?
25. Višina vodnega curka na sliki 11.28 je 66 mm. Oцени, koliko časa so potovali zračni mehurčki iz cevi do spodnjega dela slike.



Slika 11.28: Curek vode, ki izteka iz vodovodne pipe, vsebuje zračne mehurčke.

26. Če je pretok skozi cev na sliki 11.14 (stran 179) $1 \text{ m}^3/\text{minuto}$, izračunaj, kolikšni sta hitrosti tekočine skozi preseka S_1 in S_2 , če je cev okrogla s polmeroma $R_1 = 4 \text{ cm}$ in $R_2 = 2 \text{ cm}$.
27. Za prejšnji primer izračunaj, kolikokrat je tlak na mestu 1 večji od tlaka na mestu 2, če se po cevi pretaka voda.
28. Ali bo razmerje tlakov (p_1/p_2) v prejšnjem drugačno, če po cevi namesto vode teče bencin? Izračunaj ga!
29. Zakaj letalo potrebuje določeno hitrost, da vzleti? Premisli, kako je odvisna razlika tlakov na letalskem krilu od hitrosti (slika 11.18).
30. Če je hitrost na zgornji strani letalskega krila (slika 11.18) za 20 % večja od hitrosti spodaj, nariši, kako se spreminja sila na krilo v odvisnosti od hitrosti.
31. Če nalivaš pijačo v kozarec, opaziš, da se curek proti kozarcu oži. Zakaj?
32. Na sliki 11.19 (stran 183) teče po cevi voda. Premer cevi je na širšem delu 10 cm in 4 cm na ožjem delu. Izračunaj, kolikšna je hitrost vode v širšem delu cevi, če je razlika višin v navpičnih ceveh 1 m. Kolikšen je pretok vode?
33. Nariši graf, kako se spreminja presek vodnega curka z oddaljenostjo od vodovodne pipe (slika 11.20).
34. Če povečaš hitrost iztekanja vode iz pipe na sliki 11.20, ali se bo oblika vodnega curka kaj spremenila?
35. S kapilarnim viskozimetrom (stran 190) smo ugotovili, da potrebuje merjena tekočina z gostoto $1,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ za pretok 12 s, enaka količina vode pa 10 s. Kolikšna je viskoznost te tekočine?

36. Stekleno kroglico s polmerom 3 mm spustimo v tekočino (glej stran 191). Izmerimo, da za razdaljo 60 cm potrebuje 4 s. Izračunaj, kolikšna je viskoznost te tekočine, če je njena gostota $1,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.
37. Ali je koeficient upora (K_u) v enačbi 11.21 odvisen od snovi, iz katere je narejen gibajoči se predmet? Zakaj?
38. Oцени, kolikšna je največja hitrost, ki jo lahko doseže človek pri skoku iz letala med prostim padom v zraku. Za upor zraka uporabi kar Stokesovo enačbo (en. 11.22).
39. Izračunaj, kolikšna je v glicerolu končna hitrost padanja steklene kroglice s premerom 3 mm.
40. Izračunaj, kolikšno je Reynoldsovo število v prejšnjem primeru. Kaj to pomeni?
41. Ob upoštevanju rezultatov poglavja 11.10.6 nariši, kako se spreminjata hitrost in pospešek padanja predmeta v sredstvu.
42. Železno kroglo s polmerom 10 cm spustimo s 50 m visokega mostu. Izračunaj, kolikšna bo hitrost krogle po treh sekundah, če upoštevamo upor zraka (glej poglavje 11.10.6). Rezultat primerjaj s hitrostjo, izračunano za prosti pad, brez upoštevanja sile upora.
43. Kako daleč bo padla krogla v prejšnjem primeru? Primerjaj rezultat s potjo, izračunano za prosti pad, brez upoštevanja upora zraka.

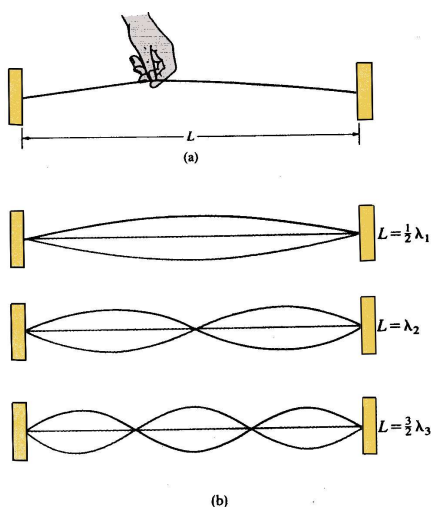
12

ZVOK



Zvok je longitudinalno valovanje, ki vzbudi naše čutilo sluha. Prav tako pa imenujemo zvok tudi občutek, ki pri tem nastane v naših možganih. **Izvor** zvoka je nihajoč predmet, ki oddaja **sredstvu** energijo nihanja. Ta se širi po sredstvu v obliki longitudinalnih valov. Njihova frekvenca je enaka frekvenci izvora. Zvok zaznamo z **detektorjem**, ki je lahko uho ali pa ustrezen merilnik.

12.1 Izvor zvoka



Slika 12.1: Struno odmaknemo iz ravnovesne lege (a). Le stoječa valovanja (b, c, d) trajajo dlje. Prikazano je nihanje z osnovno lastno frekvenco (b) in dve nihanji z naslednjima višjima harmoničnima frekvencama (c in d).

Zvok lahko ustvarimo z nihanjem strune. **Struna** je napeta elastična vrstica. Zvok ustvarimo s struno tako, da jo odmaknemo iz ravnovesne lege in jo spustimo. Po struni, ki jo napenja sila F , se širi transversalno valovanje s hitrostjo

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (12.1)$$

kjer je μ masa strune na dolžinsko enoto (linearna gostota). Nihanje strune je v prvem trenutku lahko zelo zapleteno, a se hitro poenostavi, saj le stoječa valovanja z eno od resonančnih frekvenc strune trajajo nekaj časa (slika 12.1). Ker je struna na obeh koncih pritrjena, tam ne more nihati – tam sta vozla. Področje, kjer je amplituda stoječega valovanja največja, pa imenujemo hrbet stoječega valovanja. Nihanje strune vzbudi zvočno valovanje v zraku. Njegova frekvenca (ν) je enaka frekvenci strune, valovna dolžina (λ) pa je odvisna od hitrosti širjenja zvoka v sredstvu (c):

$$c = \lambda \nu. \quad (12.2)$$

Napravo, ki ustvarja zvok z nihanjem zračnega stolpca v cevi, imenujemo **piščal**. Na sliki 12.1.1 (stran 203) je prikazana na enem koncu odprta piščal. Na tem koncu lahko delci zraka prosto nihajo in zato tu nastane hrbet stoječega valovanja. Na zaprtem koncu piščali pa zrak ne more nihati in zato je tu vozle.

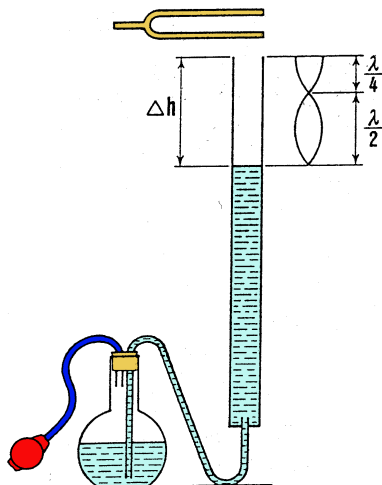
12.1.1 Quincejeva piščal

Quincejeva piščal je navpično postavljena steklena cev, ki je na enem koncu odprta, na drugem pa jo zapira vodna gladina (slika 12.1.1). Spodaj je cev priključena na posodo z vodo. Višino vodne gladine v cevi spreminjamo tako, da spreminjamo tlak v posodi. Nad cevjo so pritrjene glasbene vilice, s katerimi lahko vzbudimo stoječe zvočno valovanje zračnega stebra v cevi. To ima največjo amplitudo na odprtem koncu cevi in amplitudo nič na drugem koncu, ki ga zapira vodna gladina.

S spreminjanjem dolžine piščali poiščemo tiste dolžine, pri katerih je piščal v resonanci z zvočilom. Tedaj je dolžina zračnega stebra v cevi:

$$\Delta h = \frac{\lambda}{4} + N \frac{\lambda}{2}, \quad (12.3)$$

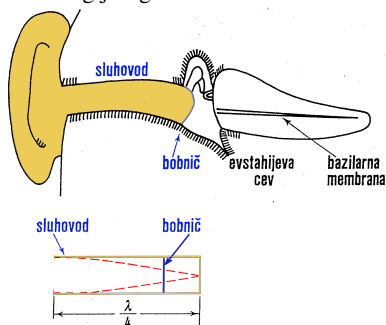
kjer je N celo število (0, 1, 2, 3 ...).



Na sliki je prikazano eno od stoječih valovanj, za katero je $\Delta h = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3\frac{\lambda}{4}$.

Če poznamo frekvenco zvoka (ν), lahko tako določimo hitrost zvoka v zraku (c) po enačbi 12.2.

Lastnost piščali, ki je na eni strani odprta, na drugi pa zaprta, ima tudi sluhovod pri ušesu, ki je shamatsko prikazan na sliki. Zato lahko pričakujemo, da je uho bolj občutljivo za tiste zvočne frekvence, pri katerih pride v sluhovodu do resonance. Zvok te frekvence povzroči močnejši občutek glasnosti kot zvok neresonančne frekvence z enako gostoto energijskega toka.



12.2 Gibanje zvoka v sredstvu

Hitrost širjenja zvoka je odvisna od vrste sredstva (tabela 12.1) in temperature. Za hitrost zvoka v zraku (c) so ugotovili naslednjo zvezo:

$$c = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,60 \frac{\text{m}}{\text{s}^\circ\text{C}} T, \quad (12.4)$$

kjer je T temperatura v stopinjah Celzija. 331 m/s je tako hitrost zvoka v zraku pri 0°C .

V splošnem velja, da se longitudinalno valovanje širi po snovi z gostoto ρ in stisljivostjo χ s hitrostjo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}}. \quad (12.5)$$

V trdnih snoveh je stisljivost povezana z modulom elastičnosti E ($\chi = 1/E$), zato je hitrost zvoka

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (12.6)$$

Za idealne pline pa iz enačbe 12.5 dobimo:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}. \quad (12.7)$$

Splošna plinska konstanta (R) je 8300 J/K (glej stran 220), T je absolutna temperatura, M molska masa plina in κ razmerje med specifičnima toplotama pri stalnem tlaku in stalni prostornini (c_p/c_v). Za dani plin je hitrost zvoka torej odvisna le od temperature.

Zrak je mešanica plinov z različnimi molskimi masami. Če privzamemo vrednost $M = 29$ za efektivno molsko maso zraka in $\kappa = 1,4$, ugotovimo, da enačba 12.4 res približno velja za običajne temperature.

Primer 12.55

Za primer lahko izračunamo hitrost zvoka v ogljikovem dioksidu pri temperaturi $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$. Ta plin, z molsko maso 44, sestavljajo triatomne molekule (CO_2). Zato je $\kappa = 1,3$. Iz gornje enačbe dobimo $v = 259 \text{ m/s}$, kar se ujema z izmerjeno vrednostjo, podano v tabeli 12.1.



Tabela 12.1: Hitrost zvoka v nekaterih snoveh pri 20 °C

Snov	Hitrost zvoka (m/s)
zrak	343
voda	1440
morska voda	1560
svinec	2640
medenina	3490
steklo	≈ 4500
jeklo	≈ 5000
ogljikov dioksid pri 0 °C	259

12.3 Zaznava zvoka

Dve najbolj očitni lastnosti zvoka sta njegova višina in glasnost. Višina zvoka je povezana s frekvenco, čim višja je frekvenca, tem višji je zvok. Človeško uho zazna zvoke med približno 20 Hz in 20 kHz. Natančna meja tega področja slišnosti je delno odvisna od posameznika. S starostjo vse slabše zaznavamo visoke frekvence – zgornja meja se lahko premakne navzdol do 10 kHz ali celo nižje.

Zvok s frekvenco nad 20 kHz imenujemo **ultrazvok** in ga ne moremo slišati. Nekateri živali pa ultrazvok slišijo. Meja slišnosti psa je na primer okoli 50 kHz.

Človeško uho je zelo občutljiv instrument. Zazna lahko zvočna valovanja, če je gostota energijskega toka vsaj $j_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Gostota energijskega toka (j) je energija zvoka, ki zadane površino v določenem času. Kadar je ta večja od približno 1 W/m^2 , zvok sicer slišimo, a je to že boleče. Obseg zaznavanja ušesa je torej zelo velik. Vendar pa občutek glasnosti ni premo sorazmeren gostoti energijskega toka zvoka. Ugotovili so, da potrebujemo za dvakrat glasnejši zvok približno desetkrat večjo gostoto energijskega toka. Zato vpeljemo jakost zvoka (I), ki je logaritemsko odvisna od j :

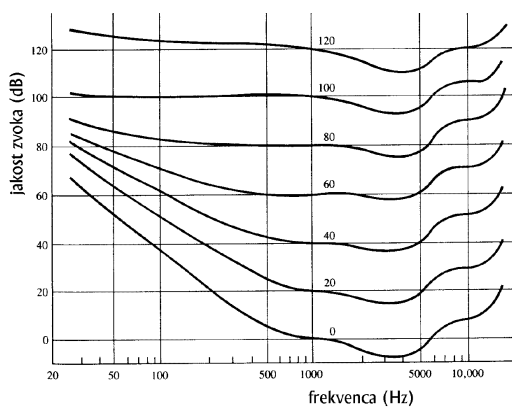
$$I = 10 \log(j/j_0). \quad (12.8)$$

Enota za tako izračunano jakost zvoka je decibel (dB). Nekaj primerov jakosti zvoka je podanih v tabeli 12.2. Meja slišnosti (j_0) ima jakost 0 dB, meja bolečine pa 120 dB.

Vendar pa uho ne zazna vseh zvokov enake jakosti enako glasno. Občutek glasnosti je namreč odvisen tudi od frekvence zvoka. Na sliki 12.2 so prikazane krivulje enake glasnosti kot funkcije jakosti zvoka in njegove frekvence (Fletcher-Munsonove krivulje). Glasnost zvoka je definirana tako, da povzročita dva tona

Tabela 12.2: Jakosti različnih zvokov

Zvok	Jakost v dB
meja slišnosti	0
šelesenje listja	10
šepetanje	20
pogovor	65
notranjost avtomobila pri 90 km/h	75
meja bolečine	120



Slika 12.2: Krivulje enake glasnosti v odvisnosti od frekvence zvoka. Številke nad njimi pomenijo glasnost v fonih.



Slika 12.3: Christian Doppler (1803–1853) - avstrijski fizik

z enako glasnostjo v ušesu približno enak občutek. Enota za glasnost je fon in je izbrana tako, da je za zvok frekvence 1 kHz kar 1 fon = 1 dB.

12.4 Dopplerjev pojav

Verjetno ste že kdaj doživeli, da je mimo vas vozil hupajoč avtomobil. Opazili ste, da je bil ton hupe višji, ko se vam je avto približeval, in se je znižal, ko je avto peljal mimo vas in se začel oddaljevati. Frekvenca zvočnega valovanja in s tem višina tona je torej odvisna od gibanja zvočila. To lastnost imenujemo Dopplerjev pojav po Christianu Dopplerju, ki je leta 1842 izpeljal matematično zvezo med frekvenco zvoka ter hitrostjo zvočila in poslušalca. Zanimivo je, da so nekaj let pozneje njegove izračune potrdili tudi z meritvami. Tedaj je bila edina naprava, ki se je gibala dovolj hitro in enakomerno – vlak. Dva dneva je na Nizozemskem lokomotiva prevažala po tiru sem in tja nizek vagon, na katerem je sedela skupina trobentačev in igrala različne tone. Ob progi pa je nekaj izkušenih glasbenikov zapisovalo, katere tone so slišali. Razlike med zaigranimi in slišanimi toni so bile res take, kot jih je napovedal Doppler.

Zvok je valovanje zraka, zato je sprememba njegove frekvence drugačna, kadar se glede na zrak giblje poslušalec ali zvočilo. Oglejmo si primer, ko zvočilo miruje, poslušalec pa se giblje. Izberimo hitrost poslušalca (v_p) tako, da bo pozitivna, kadar se giblje proč od zvočila, in negativna, če se mu približuje. Ko se poslušalec giblje v smeri zvoka, torej skupaj z njim, opazi, da se zanj zvok giblje počasneje. Če označimo hitrost zvoka, ki bi jo izmeril mirujoči poslušalec, s črko c , potem je hitrost zvoka za gibajočega poslušalca:

$$c' = c - v_p = c \left(1 - \frac{v_p}{c}\right). \quad (12.9)$$

Ta zveza seveda velja tudi za poslušalca, ki se približuje zvočilu. Glede na našo izbiro hitrosti je tedaj hitrost poslušalca negativna in hitrost zvoka se zanj res poveča, saj se giblje proti smeri razširjanja zvoka.

Valovna dolžina zvoka pa je za gibajočega poslušalca enaka kot za mirujočega, saj se zaradi gibanja razdalje ne spremenijo. Če si pomagamo še z enačbo 12.2 na strani 202, ugotovimo, da gibajoči poslušalec zazna frekvenco zvoka

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_p}{c}\right), \quad (12.10)$$

če je ν frekvenca, ki jo je oddalo mirujoče zvočilo. Frekvenca zvoka in s tem tudi njegova višina se znižata, kadar se poslušalec oddaljuje od izvora zvoka. Kadar pa se poslušalec giblje v obratni smeri, tj. v smeri proti zvočilu, je njegova hitrost negativna in enačba 12.10 nam pove, da sliši zvok višje frekvence.

Drugače pa je, kadar se giblje zvočilo, poslušalec pa miruje glede na sredstvo, po katerem se širi zvok (slika 12.4). Tedaj je za poslušalca hitrost zvoka nespremenjena, drugačna pa je valovna dolžina. Če se zvočilo giblje proti poslušalcu s hitrostjo v_z , potem se v času enega nihaja $T = 1/\nu = \lambda/c$ premakne za $v_z T$. Zato se za prav toliko skrajša valovna dolžina zvoka, ki je

$$\lambda' = \lambda - v_z T = \lambda - v_z \frac{\lambda}{c} = \lambda \left(1 - \frac{v_z}{c}\right). \quad (12.11)$$

Poslušalec zazna zvok s frekvenco

$$\nu' = \frac{c}{\lambda \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)} = \frac{\nu}{\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)}. \quad (12.12)$$

Kadar pa se gibljeta oba, poslušalec in zvočilo, pa lahko enačbi 12.10 in 12.12 združimo. Dobimo:

$$\nu' = \nu \frac{\left(1 - \frac{v_p}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)}. \quad (12.13)$$

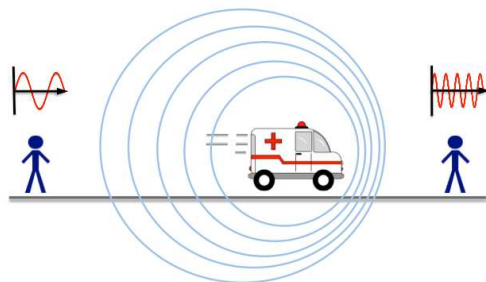
Kadar sta hitrosti gibanja (v_p in v_z) dosti manjši od hitrosti razširjanja zvoka (c), lahko enačbo 12.13 še poenostavimo. Upoštevamo, da je

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x, \quad (12.14)$$

če je x zelo majhen. Če obdržimo le prve člene, dobimo:

$$\nu' \approx \nu \left(1 - \frac{v_p - v_z}{c}\right) = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad (12.15)$$

kjer v označuje relativno hitrost zvočila in poslušalca. Relativno hitrost ($v = v_p - v_z$) smo izbrali tako, da je pozitivna, kadar se zvočilo in poslušalec medsebojno oddaljujeta – tedaj se frekvenca zvoka zmanjša. Kadar pa se približujeta, upoštevamo, da je hitrost v negativna in se zato frekvenca zvoka poveča. Premik frekvence imenujemo Dopplerjev premik in je torej odvisen od razmerja hitrosti gibanja in hitrosti razširjanja zvoka.



Slika 12.4: Kadar se izvor zvoka giblje stran od poslušalca ta sliši zvok z večjo valovno dolžino in zato nižjo frekvenco (levo), kot poslušalec proti kateremu se giblje zvočilo (desno).



Slika 12.5: Dopplerjev pojav uporabljamo za merjenje hitrosti. V primeru na sliki je valovanje elektromagnetno.

12.5 Ernest Mach in nadzvočna hitrost



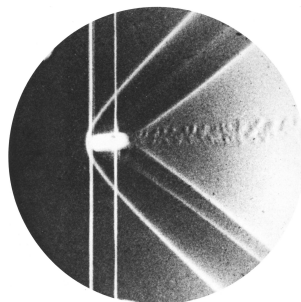
Ernest Mach (1838 - 1916) je bil pomemben fizik in filozof. Rodil se je na Moravskem, vendar je precej časa preživel na posestvu svojih staršev na Velikem Slatniku blizu Novega mesta. Njegov oče Johann je znan med drugim po tem, da je uspel iz Azije dobiti jajčeca sviloprejke in jih pričel gojiti na svojem posestvu na Dolenjskem. Od tam so mu metulji ušli in se razširili ne samo po Sloveniji ampak po vsej Evropi.

Ernest Mach pa je danes poznan predvsem po svojih poskusih z izstrelki, ki se gibljejo z nadzvočno hitrostjo. Ugotovil je, da se pri gibanju z nadzvočno hitrostjo pred

izstrelkom ustvari valovno čelo, saj se motnja v sredstvu lahko giblje le z zvočno hitrostjo. Kadar izstrelak preseže zvočno hitrost pravimo, da prebije zvočni zid in to sliši opazovalec kot zvok, močan pok.

Po Ernestu Machu so poimenovali **machovo število** (M), ki je razmerje med hitrostjo gibanja predmeta v sredstvu in hitrostjo zvoka v tem sredstvu. Tako torej pravimo, da je $M < 1$ kadar se na primer letalo giblje s hitrostjo manjšo od zvočne hitrosti, pri $M = 1$ se letalo giblje z zvočno hitrostjo, pri $M = 2$ je njegova hitrost dvakratna hitrost zvoka itd.

Po Ernestu Machu se imenuje tudi eden od kraterjev na Luni.



Machova fotografija udarnega vala nadzvočnega izstrelka.

12.6 Vprašanja

1. Na podlagi česa lahko sklepamo, da je zvok valovanje?
2. Ko gre zvok iz zraka v vodo ali pričakuješ, da se spremeni frekvenca ali valovna dolžina zvoka?
3. Kako je višina tona odvisna od napetosti, debeline in dolžine strune?
4. Izračunaj frekvence zvoka, ki ga oddaja struna na sliki 12.1, če je dolžina strune 10 cm in je ta tako napeta, da se po njej širi transversalno valovanje s hitrostjo 500 m/s.
5. Oцени, kolikšna je frekvenca zvoka, ki ga oddaja 10 cm dolga, na enem koncu zaprta piščal.
6. S skalnega roba nad jezerom vržeš kamen v vodo. Kolikšna je tvoja višina nad vodo, če zaslišiš pljusk 1 sekundo po tem, ko vidiš, da pade kamen v vodo?
7. V brezno vržeš kamen. Kolikšna je globina brezna, če zaslišiš zvok 3 sekunde po tem, ko si spustil kamen?
8. Opazuješ in poslušaš 100 metrov oddaljenega bobnarja. Ali zvok sledi gibom?
9. Pojasni sliko 12.2 na strani 206.
10. Pojasni zgradbo in delovanje človeškega ušesa.
11. Opiši enega izmed primerov merjenja hitrosti zvoka v zraku.
12. Kje lahko v vsakdanjem življenju opaziš Dopplerjev pojav?

13

TEMPERATURA IN TOPLOTA



Slika 13.1: Za taljenje snega potrebujemo veliko energije. Slika prikazuje bencinski kuhalnik, ki je primeren predvsem za zahtevnejše zimske ture.

13.1 Temperatura

Temperatura je mera za to, kako topel ali hladen je opazovani predmet. Veliko lastnosti snovi je odvisnih od temperature. Večina predmetov se raztegne, če njihova temperatura naraste, električna upornost je odvisna od temperature, prav tako tudi trdnost, gostota, viskoznost itn. Snovi pogosto s temperaturo bistveno spremenijo svoje lastnosti. Tako je na primer voda pri nizki temperaturi trdna snov (led), pri višji temperaturi kapljevin, pri še višji pa plin (para). Pri zelo visoki temperaturi se spremeni barva snovi – grelec v električni pečici prične žareti, ko naraste njegova temperatura; prav tako nitka v žarnici. Tudi kemijske reakcije so odvisne od temperature. Zato vsa živa bitja lahko živijo le na ozkem temperaturnem območju. Nekatera so odvisna le od temperature okolice, druga pa lahko delno tudi sama uravnavajo svojo temperaturo.

Temperaturo v vsakdanjem življenju najpogosteje merimo v stopinjah Celzija. Ta lestvica temelji na lastnosti vode – njeno ledišče pri normalnem zračnem tlaku so izbrali kot 0°C , vrelišče pa 100°C . Vendar so danes to lestvico raje povezali z absolutno ničlo in trojno točko vode, to je temperaturo, pri kateri hkrati obstajajo v ravnovesju led, voda in vodna para.

Za računanje pa po navadi uporabljamo stopinje Kelvina. Ta lestvica se prične pri absolutni ničli ($0\text{ K} = -273,15^{\circ}\text{C}$) – najnižji mogoči temperaturi. Tej temperaturi se je mogoče poljubno približati, nobene snovi pa ni mogoče ohladiti na absolutno ničlo ali celo na nižje temperature. Najnižja temperatura, ki so jo do sedaj dosegli (Wolfgang Ketterle, MIT, leta 2003), je $0,5\text{ nK}$ ($5 \cdot 10^{-10}\text{ K}$). Velikost stopinj Kelvina je izbrana tako, da je enaka stopinjam Celzija. Temperaturo v stopinjah Kelvina zato izračunamo tako, da stopinjam Celzija prištejemo 273,15. Tako na primer 100°C ustreza $373,15\text{ K}$.

Tabela 13.1: Nekaj tipičnih vrednosti temperature

	stopinje Celzija [$^{\circ}\text{C}$]	stopinje Kelvina [K]
absolutna ničla (po definiciji)	-273,15	0
vrelišče tekočega dušika	-195,8	77,4
tališče čistega ledu	-0,0001	273,1499
trojna točka vode (po definiciji)	0,01	273,16
vrelišče vode pri 1 atm (101,325 kPa)	99,9839	373,1339

13.1.1 Temperaturna lestvica



Daniel Gabriel Fahrenheit se je rodil leta 1686 v tedaj nemškem mestu Gdansk (danes na Poljskem) in umrl 1736 v Haagu na Nizozemskem. Po poklicu je bil izdelovalec vremenoslovnih instrumentov, kamor sodijo tudi termometri. Vendar so ti bili v sedemnajstem stoletju zelo nenatančni. Uporabljali so plinske termometre, pa tudi take polnjene z alkoholom ali mešanico alkohola in vode. Fahrenheit pa je odkril novo metodo za čiščenje živega srebra, da se to ni več lepilo ob stene ozke cevke in tako ga je lahko uporabil v termometru. Z živosrebrnim termometrom je lahko meril temperature pod lediščem vode in tudi nad njenim vreliščem. Za ničlo temperaturne lestvice je izbral najnižjo temperaturo, ki jo je še lahko ponovljivo dosegel z mešanico ledu in soli, kot drugo umeritveno točko pa je vzel temperaturo človeškega telesa. S tem se je poskušal izogniti po njegovem mnenju nepraktičnim negativnim vrednostim temperature. Interval med tema vrednostima je razdelil na 12 enot in vsako od njih še nadalje na 8 delov, skupaj torej 96 stopinj. V tej temperaturni lestvici voda zmrzuje pri normalnem atmosferskem tlaku pri 32 in vre pri 212 sto-

pinjah. Kasneje so v njegovih meritvah ugotovili napako vendar so raje obdržali ledišče vode pri 32 stopinjah in razliko do vrelišča definirali kot točno 180 stopinj, kar se jim je zdelo zelo praktično, saj ima to število več deliteljev kot katerokoli manjše število - le človeška telesna temperatura je tako postala 98,6 stopinj, kar pa v resnici sploh ni bilo pomembno. Zanimivo je, da Fahrenheitovo temperaturno lestvico še vedno uporabljajo v ZDA in nekaterih drugih angleško govorečih državah.

Za razliko od Fahrenheita, ki je bil član britanske znanstvene akademije Royal Society pa je nekoliko kasneje **Anders Celsius** (1701–1744) vse svoje življenje deloval predvsem na Švedskem. Bil je astronom, fizik in matematik ter se je med drugim ukvarjal z zelo natančnimi meritvami odvisnosti vrelišča vode od zračnega tlaka. Predlagal je temperaturno lestvico, ki je imela 100 stopinj pri ledišču vode in 0 stopinj pri vrelišču. Tako lestvico je leta 1742 predlagal švedski Kraljevi akademiji znanosti. Šele kasneje je "zaradi praktičnosti" Carl Linnaeus obrnil to lestvico. Celsius je svojo temperaturno lestvico imenoval sto stopinjsko (latinsko: centigrade) in šele kasneje je dobila ime po njem.



Tabela 13.2: Koeficient linearnega toplotnega raztezka (α) pri 20 °C

Snov	α [K ⁻¹]
aluminij	$2,5 \times 10^{-5}$
baker	$1,7 \times 10^{-5}$
steklo	$0,9 \times 10^{-5}$
steklo (Pirex)	$0,3 \times 10^{-5}$
železo, jeklo	$1,2 \times 10^{-5}$
medenina	$1,9 \times 10^{-5}$
svinec	$2,9 \times 10^{-5}$
beton, opeka	$1,2 \times 10^{-5}$
marmor	$0,1-0,4 \times 10^{-5}$
polivinil	7×10^{-5}

Tabela 13.3: Koeficient prostorninskega toplotnega raztezka (β) pri 20 °C

Snov	β [K ⁻¹]
voda	21×10^{-5}
živo srebro	18×10^{-5}
glicerol	50×10^{-5}
bencin	95×10^{-5}
etanol	110×10^{-5}
zrak	340×10^{-5}



Slika 13.2: Zaradi velike temperaturne razlike se je železniška proga skrivila.

13.1.2 Toplotno raztezanje snovi

Večina snovi se raztegne pri segrevanju in skrči pri ohlajanju. Če imamo palico ali žico dolžine ℓ , lahko izračunamo, za koliko se spremeni njena dolžina ($\Delta\ell$), če spremenimo temperaturo za ΔT :

$$\Delta\ell = \alpha\ell\Delta T. \quad (13.1)$$

Sorazmernosti koeficient α imenujemo koeficient linearnega raztezka. Nekaj njegovih vrednosti za različne snovi je navedenih v tabeli 13.2.

Ti raztezki pogosto niti niso majhni. Oglejmo si železniško progo. Opazimo, da marsikje železniški tiri med seboj niso zvarjeni, ampak je med njimi nekajmilimetrski presledek. Ta je potreben zato, ker se tiri poleti segrejejo in zato raztegnejo. Prav tako pri daljših mostovih opazimo na cestišču bolj ali manj prikrit presledek. Tudi mostovi se namreč v poletni vročini raztezajo, v mrazu pa krčijo.

Primer 13.56

Izračunajmo, za koliko se raztegne 10 m dolga jeklena cev centralnega ogrevanja, ko vanjo spustimo toplo vodo s temperaturo 80°C . Na začetku naj ima cev sobno temperaturo (20°C).

Razlika temperatur je torej $\Delta T = 60^\circ\text{C}$, vrednost linearnega raztezka pa preberemo iz tabele 13.2. Dobimo:

$$\Delta\ell = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ m} \cdot 60 \text{ K} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Vidimo, da se cev raztegne kar za 7,2 mm.

Pri računu smo razliko temperatur zapisali $\Delta T = 60 \text{ K}$, saj so stopinje Kelvina in Celzija enako velike in so zato razlike temperatur v obeh skalah enake.

• • •

Pogosto pa nas zanima, za koliko se pri spremembi temperature spremeni prostornina. To spremembo (ΔV) izračunamo:

$$\Delta V = \beta V \Delta T, \quad (13.2)$$

kjer je β koeficient prostorninskega raztezka. Za trdne snovi, ki se enakomerno raztezajo v vse smeri, je ta enostavno povezan s koeficientom linearnega raztezka:

$$\beta = 3\alpha. \quad (13.3)$$

Za tekočine je nekaj vrednosti koeficienta prostorninskega raztezka navedenih v tabeli 13.8.

Primer 13.57

Izračunajmo, za koliko se poveča prostornina enega kubičnega metra vode, če jo segrejemo za deset stopinj.

Koeficient prostorninskega raztezka vode preberemo iz tabele 13.8 in dobimo:

$$\Delta V = 21 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot 10 \text{ K} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2,1 \text{ dm}^3.$$

Prostornina se torej poveča kar za $2,1 \text{ dm}^3$, to je za 2,1 litra.

• • •

13.1.3 Merjenje temperature

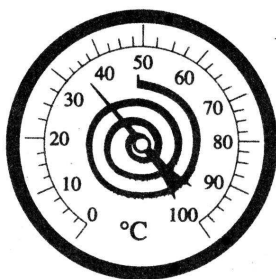


Slika 13.3: Sobni termometer uporablja za prikaz temperature raztezanje obarvane tekočine v stekleni cevki.

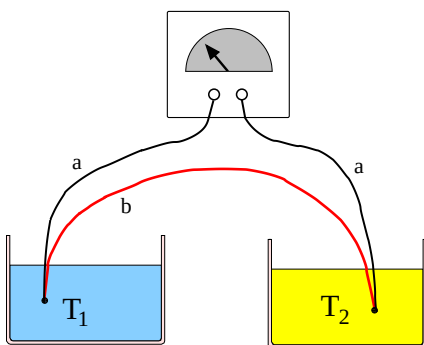
Naprave, s katerimi merimo temperaturo, imenujemo termometri. Za merjenje temperature lahko uporabimo kakršnokoli lastnost snovi, ki se spreminja s temperaturo. Najenostavneje lahko opazujemo spremembe prostornine. Če v stekleno cevko zapremo tekočino, dobimo **tekočinski termometer** (slika 13.3). Zanj po navadi uporabimo obarvan alkohol, nekdanj pa so bili zelo pogosti tudi živosrebrni termometri.



Slika 13.4: Bimetalni trak je sestavljen iz dveh kovinskih trakov z različnima koeficientoma toplotnega raztezka.



Slika 13.5: V bimetalnem termometru je bimetalni trak v obliki spirale pritrjen na kazalec.



Slika 13.6: Termočlen je sestavljen iz dveh stikov različnih kovin (a in b). Z njim lahko merimo razliki temperatur obeh stikov ($T_1 - T_2$).

Bimetalni termometer je sestavljen iz dveh med seboj spojenih kovinskih trakov z različnima koeficientoma toplotnega raztezka. Primer je shematsko prikazan na sliki 13.4, kjer se spodnji trak pri segrevanju bolj raztegne, kot zgornji. Če tak bimetalni trak segrejemo, se upogne navzgor. Bimetalni trak lahko izdelajo v obliki spirale, njegov konec pritrdijo na ohišje, drugega pa na kazalec in tako dobijo bimetalni termometer (slika 13.5). Bimetalne trakove pogosto uporabljamo tudi za

regulacijo temperature, na primer v električnih bojlerjih, likalnikih, pečeh itn. Ko se naprava dovolj segreje, se bimetalni trak toliko upogne, da prekine električni tok in s tem tudi segrevanje.

Tekočekristalni termometri temeljijo na spoznanju, da se urejenost molekul v tekočih kristalih spreminja s temperaturo. Zato se spreminja tudi barva tekočekristalnega premaza. Uporabljamo jih predvsem za približno oceno temperature. Če pa opazovano površino premažemo s tekočekristalno snovjo, lahko opazujemo porazdelitev temperature po celotni površini.

Danes zelo pogosto uporabljamo električne merilnike temperature, kot sta na primer uporovni termometer (termistor) in termočlen. Pri njih uporabljamo temperaturno spreminjanje ene od električnih lastnosti, ki se odraža v električni napetosti. Čeprav merimo električno napetost, je skala po navadi že umerjena v stopinjah. **Električni termometri** so večinoma zelo natančni, ker lahko napetost natančno izmerimo. So navadno tudi zelo majhni in zato hitro sledijo spremembam temperature. Pogosto omogočajo tudi digitalni zapis in shranjevanje podatkov, kar je koristno za nadaljnjo obdelavo meritev.

Uporovni termometer (termistor) uporablja pojav, da se električna upornost snovi spreminja s temperaturo.

Termočlen pa je naprava, ki meri razliko temperatur na dveh mestih. Temelji na pojavu, da na stiku dveh različnih kovin nastane električna napetost, ki je odvisna od temperature. Če staknemo dve različni kovini, kot je prikazano na sliki 13.6, je izmerjena napetost med obema stikoma sorazmerna razliki temperatur. Ker termočlen meri le razliko temperatur, mora biti en njegov konec vedno pri dobro poznani temperaturi. Ta referenčna temperatura je lahko ledišče vode (mešanica ledu in vode), vrelišče tekočega dušika ali pa kar sobna temperatura. Termočlen je občutljiv na zelo majhne spremembe temperature in je primeren za natančne in hitre meritve razlike temperatur – natančnost absolutnih meritev pa je seveda odvisna od natančnosti referenčne temperature.

13.2 Plini

Živimo na dnu zračnega oceana in vsa naša dejavnost je odvisna od pravilne izmenjave plinov. Zato je razumevanje, kaj se dogaja s plini pri spremembi temperature, zelo pomembno. V tem poglavju si bomo ogledali lastnosti **idealnih plinov** – plinov, ki so tako razredčeni, da lahko interakcijo med njihovimi molekulami zanemarimo. To je sicer le približek, ki pa prav dobro velja tudi za realne pline, če je le njihova gostota majhna.

Količine, ki nas bodo pri plinih zanimala, so temperatura, tlak in prostornina. Iz izkušnje vemo, da so te tri količine med seboj povezane. Če plin v zaprti posodi segrevamo, bo narastel njegov tlak – tlak je torej sorazmeren temperaturi. Kadar pa

plinu omogočimo, da se razširi, opazimo, da se pri segrevanju poveča njegova prostornina. Zato je tudi prostornina sorazmerna temperaturi. Kaj pa tlak in prostornina? Če plin pri stalni temperaturi stisnemo in mu s tem zmanjšamo prostornino, se tlak poveča. Tlak je torej obratno sorazmeren prostornini.

Vsa ta spoznanja lahko strnemo v enostavno zvezo med tlakom (p), prostornino (V) in temperaturo (T):

$$\frac{pV}{T} = \text{konstantno.} \quad (13.4)$$

Pri tem se moramo zavedati, da je T absolutna temperatura, izražena v stopinjah Kelvina.

Primer 13.58

Kot primer izračunajmo, za koliko naraste tlak plina v jeklenki, v kateri je pri sobni temperaturi (20°C) tlak 2 bara, če jo segrejemo na 80°C .

Začetno stanje je torej: $p_z = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $T_z = (273 + 20) \text{ K} = 293 \text{ K}$ in prostornina V . Pri tem smo upoštevali, da je $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ in izrazili temperaturo v stopinjah Kelvina.

V končnem stanju pa ima plin temperaturo $T_k = 353 \text{ K}$, tlak p_k in enako prostornino (V) kot na začetku.

Enačba 13.4 pove, da je količina $\frac{pV}{T}$ konstantna, zato je ta količina v začetnem stanju enaka kot v končnem. Zato lahko zapišemo:

$$\frac{p_z V}{T_z} = \frac{p_k V}{T_k}.$$

Krajšamo prostornino (V) in izrazimo končni tlak:

$$p_k = \frac{p_z T_k}{T_z},$$

kar nam da:

$$p_k = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 353 \text{ K}}{293 \text{ K}} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 2,4 \text{ bar}$$

• • •

Lahko se tudi vprašamo, od česa je odvisna konstanta v enačbi 13.4. Hitro uganemo, da je odvisna od količine plina, torej od njegove mase. Vendar meritve pokažejo, da je ta odvisnost popolnoma enaka za vse pline, če namesto mase upoštevamo število molov. En mol kakršnekoli snovi je namreč izbran tako, da je v njem vedno enako število molekul. To število imenujemo Avogadrovo število (N_A) in je enako $6,02 \cdot 10^{23}$ (glej tudi stran 17). Molsko maso posameznih snovi lahko preberemo iz tabel ali pa jo enostavno ocenimo iz atomskih mas. Atomska masa

vodika je npr. 1, zato je masa enega mola plina vodika, ki ga sestavljajo molekule H_2 , 2 grama. Kisik ima atomsko maso 16, en mol kisika O_2 ima zato maso 32 g. Maso enega mola vode (H_2O) pa izračunamo kot $2\text{ g} + 16\text{ g} = 18\text{ g}$.

Plinsko enačbo 13.4 lahko zato zapišemo tudi kot $\frac{pV}{T} = nR$ oziroma

$$pV = nRT, \quad (13.5)$$

kjer je n število molov plina in R splošna plinska konstanta, ki ima vrednost $R = 8,315\text{ J}/(\text{mol K})$.

Mol je določen tako, da vsebuje točno določeno število molekul - to število imenujemo Avogadrovo število, ki je $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$. Celotno število (N) molekul danega plina je tako enako $n \cdot N_A$. Enačbo 13.5 lahko zato zapišemo tudi drugače:

$$pV = NkT, \quad (13.6)$$

kjer smo vpeljali Boltzmannovo konstanto $k = R/N_A$, ki je ena od najpomembnejših konstant v mikroskopskem svetu: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$.

Primer 13.59

Izračunajmo, kolikšna je masa zraka v sobi velikosti $4\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3\text{ m}$, pri temperaturi 20°C in tlaku 1 bar.

Iz enačbe 13.5 izračunamo število molov plina v sobi:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{10^5\text{ N/m}^2 \cdot 72\text{ m}^3}{8,315\text{ J}/(\text{mol K}) \cdot 293\text{ K}} = 2,96 \cdot 10^3\text{ mol}.$$

Pri tem smo izračunali prostornino sobe kot $V = 4\text{ m} \cdot 6\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 72\text{ m}^3$.

Če predpostavimo, da je zrak sestavljen pretežno iz duška (N_2), ki ima molsko maso $M = 28\text{ g/mol}$, ugotovimo, da je masa $2,96 \cdot 10^3$ molov:

$$m = n \cdot M = 2,96 \cdot 10^3\text{ mol} \cdot 28\text{ g/mol} = 82 \cdot 10^3\text{ g} = 82\text{ kg}.$$

Kot vidimo, masa zraka nikakor ni zanemarljiva, saj ga je v sorazmerno majhni sobi kar dobrih 80 kg.



13.3 Toplota

Na bencinskem kuhalniku na sliki 13.1 si iz snega poskušamo skuhati čaj. Bencin v gorilniku izgoreva in pri tem oddaja energijo v obliki toplote najprej okoliškemu

Tabela 13.4: Specifična toplota nekaterih snovi pri 20 °C in tlaku 1 bar

Snov	Specifična toplota [J/kgK]
svinec	130
živo srebro	140
srebro	230
baker	390
železo, jeklo	450
steklo	840
aluminij	900
zrak	1040
polivinil	1100
les	1700
olje	2000
vodna para (110 °C)	2010
led (−5 °C)	2100
etanol	2400
človeško telo	3470
voda (15 °C)	4180

zraku, ta nato preko dna posode snegu oziroma, ko se ta stali, vodi. Po navadi pravimo, da se voda pri tem segreva, s čimer mislimo, da njena temperatura narašča. Toplota vedno prehaja z mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo temperaturo. Tako na primer vroč zrak v plamenu oddaja toploto hladnejši posodi z vodo.

Toplota je torej oblika energije. Če prejme snov več energije (toplote), se bolj segreje – njena temperatura bolj naraste. Pričakujemo, da je sprememba temperature (ΔT) pri segrevanju odvisna od dovedene toplote (Q) ter mase (m) in vrste snovi. To lahko zapišemo:

$$Q = mc\Delta T, \quad (13.7)$$

kjer je c specifična toplota, ki jo včasih imenujejo tudi specifična toplotna kapaciteta. Ta je odvisna od vrste snovi. Nekaj vrednosti specifične toplote je prikazanih v tabeli 13.4. Kot vidimo, je specifična toplota vode 4180 J/kgK, kar pogosto zaokrožimo na 4200 J/kgK. To pomeni, da potrebujemo energijo 4200 J, da segrejemo en kilogram vode za eno stopinjo. To delo imenujemo ena kilokalorija (kcal) in jo občasno še srečamo kot enoto za energijo.

Primer 13.60

Izračunajmo, koliko energije potrebujemo, da segrejemo 20-kilogramski kos železa od 20 °C do 100 °C.

Iz tabele 13.4 preberemo, da je specifična toplota železa 450 J/kgK in dobimo:

$$Q = 20 \text{ kg} \cdot 450 \text{ J/kgK} \cdot 80 \text{ K} = 7,2 \cdot 10^5 \text{ J} = 720 \text{ kJ}.$$

...

Primer 13.61

Izračunajmo še, za koliko bi se segrela 5-kilogramska svinčena krogla, ki bi na tla padla z višine 10 m, če bi se vsa energija porabila za njeno segrevanje.

Potencialna energija krogle v višini 10 m je

$$W_p = m \cdot g \cdot h = 5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot 10 \text{ m} = 500 \text{ J}.$$

Če se ta energija v celoti spremeni v toploto, se po enačbi 13.7 svinčena krogla segreje za

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{500 \text{ J}}{5 \text{ kg} \cdot 130 \text{ J/kgK}} = 0,77 \text{ K}.$$

Temperatura krogle bi se torej povečala za skoraj 0,8 stopinje. Pri tem smo predpostavili, da se je vsa kinetična energija porabila za segrevanje svinčene krogle. V resnici pa pričakujemo, da bi se krogla veliko manj segrela, saj bi se del energije porabil za deformacijo krogle, velik del energije pa bi segrel tudi tla in okolico.

...

Primer 13.62

Izračunajmo, za koliko stopinj lahko v eni minuti z električnim grelcem, ki ima moč 1,5 kW, segrejemo 1 ℓ vode.

Opravljen delo grelca (moč, pomnožena s časom) je enako oddani toploti:

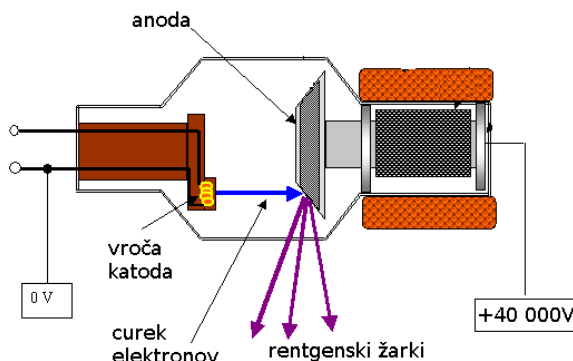
$$Q = A = P \cdot t = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J/s} \cdot 60 \text{ s} = 90 \text{ kJ}.$$

Ta toplota segreje vodo za skoraj 22 stopinj, saj je:

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ J}}{1 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kgK}} = 21,5 \text{ K}.$$

...

Primer 13.63



Slika 13.7: Shematski prikaz delovanja rentgenske cevi.

Z rentgensko cevjo (slika 13.7) na primer slikamo kosti roke. Nastavimo napetost 40 kV, tok skozi cev naj bo 10 mA in čas slikanja 250 ms. V rentgenski cevi visoka napetost pospeši elektrone, ti zadanejo bakreno anodo in približno 1 % njihove kinetične energije se spremeni v rentgensko sevanje, vso preostalo energijo pa elektroni oddajo kot toploto. Če bi curek elektronov v rentgenski cevi padel na bakreno anodo na površini 1 mm^2 in v času slikanja segrel anodo v globini 1 mm, izračunajmo za koliko bi se segrela anoda?

Najprej izračunajmo opravljeno električno delo, ki je enako kinetični energiji elektronov:

$$A = E_k = U \cdot I \cdot t,$$

kjer je U napetost, I električni tok in t čas slikanja. Tu smo uporabili znanje iz elektrike: električna moč je produkt napetosti in toka ($P = U \cdot I$) in zato enoto za moč (W) lahko zapišemo tudi $W = J/s = VA$.

Če se 99 % kinetične energije elektronov spremeni v toploto, iz tega dobimo:

$$Q = 0,99 \cdot U \cdot I \cdot t = 0,99 \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 250 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 99 \text{ J}$$

To toploto sprejme $V = 1 \text{ mm}^3$ bakra. Iz tabele 11.1 na strani 163 preberemo, da je gostota bakra $\rho = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Zato je masa segretega dela anode: $m = \rho \cdot V = 8,93 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ in ta se segreje za

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{99 \text{ J}}{8,93 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 390 \text{ J/kgK}} = 28426 \text{ K},$$

Tabela 13.5: Specifična talilna toplota nekaterih snovi pri tlaku 1 bar

Snov	Specifična talilna toplota [J/kg]	Tališče [°C]
voda	$3,33 \times 10^5$	0
etanol	$1,04 \times 10^5$	-114
svinec	$0,25 \times 10^5$	327
srebro	$0,88 \times 10^5$	961
volfram	$1,84 \times 10^5$	3410
baker	$2,14 \times 10^5$	1083
železo	$2,93 \times 10^5$	1530

Tabela 13.6: Specifična izparilna toplota nekaterih snovi pri tlaku 1 bar

Snov	Specifična izparilna toplota [J/kg]	Vrelišče [°C]
voda	$22,6 \times 10^5$	100
etanol	$8,5 \times 10^5$	78
svinec	$8,7 \times 10^5$	1750
srebro	23×10^5	2193
volfram	48×10^5	5900
baker	$54,1 \times 10^5$	2360
železo	63×10^5	3050

kjer smo specifično toploto bakra našli v tabeli 13.4.

Ta račun nam pokaže, da bi se bakrena anoda v tem primeru segrela daleč preko tališča bakra. Praktična rešitev je v tem, da z vrtenjem anode med slikanjem povečamo površino, na katero padejo elektroni in hkrati poskrbimo za dobro ohlajanje.

...

13.4 Latentna toplota

Snovi so lahko v različnih stanjih (fazah), kot so na primer trdno, tekoče, plinasto, tekočokristalno itn. Prehod iz enega stanja v drugo imenujemo **fazni prehod** in je

pogosto povezan s sprejemom ali oddajo toplote, ki jo imenujemo **latentna toplota**.

Oglejmo si primer. En kilogram ledu pri -10°C začnemo enakomerno segrevati. Temperatura počasi narašča, približno za 1°C na vsakih 2,1 kJ dovedene toplote (glej tabelo 13.4). Ko led doseže temperaturo 0°C , se začne taliti. Čeprav dovajamo topoto, temperatura ledu ostane nespremenjena (0°C), dokler se ves led ne stali. Dovedena toplota se je porabila za fazni prehod vode iz trdne v tekočo fazo. Koliko toplote je potrebno, da stalimo en kilogram snovi, nam pove **specifična talilna toplota** (tabela 13.5).

Za taljenje dane mase (m) snovi je potrebna toplota

$$Q = q_t m, \quad (13.8)$$

kjer je q_t specifična talilna toplota. Kot vidimo v tabeli 13.5, potrebujemo za taljenje enega kilograma ledu kar 333 kJ energije.

Primer 13.64

Izračunajmo, koliko časa potrebuje grelec z močjo 2 kW, da stali 1 kg ledu pri temperaturi 0°C .

Iz tabele 13.5 preberemo, da je za led $q_t = 333 \text{ kJ}$, kar nam da potrebno toploto kot

$$Q = q_t m = 333 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} = 333 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Ker je moč $P = Q/t$, izračunamo čas kot

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{333 \cdot 10^3 \text{ J}}{2 \cdot 10^3 \text{ J/s}} = 167 \text{ s}.$$

Za taljenje 1 kg ledu bi tako potrebovali 167 s, kar je 2,8 min.



Segrevajmo sedaj še naprej naš kilogram vode. Temperatura enakomerno narašča, za 1°C na vsakih 4,18 kJ dovedene toplote (glej tabelo 13.4), dokler ne doseže temperature vrelišča (100°C). Nato ostane nespremenjena, dokler vsa voda ne izpari. Latentno toploto, povezano z izparevanjem, imenujemo **specifična izparilna toplota** (tabela 13.6).

Za izparevanje mase (m) snovi je potrebna toplota

$$Q = q_i m, \quad (13.9)$$

kjer je q_i specifična izparilna toplota. Kot vidimo v tabeli 13.6, potrebujemo za izparevanje enega kilograma vode kar 2260 kJ toplote.

Tabela 13.7: Specifična sežigna toplota nekaterih snovi

Snov	Specifična sežigna toplota [J/kg]
vodik	140×10^6
bencin	48×10^6
petrolej	42×10^6
olje	40×10^6
ogljje	34×10^6
črni premog	34×10^6
les	17×10^6

Podobno kot specifično talilno in izparilno toploto lahko definiramo tudi **specifično sežigno toploto**. To je toplota, ki jo dobimo, če sežgemo 1 kg dane snovi.

Pri sežigu dane mase (m) snovi dobimo Q toplote:

$$Q = q_s m, \quad (13.10)$$

kjer je q_s specifična sežigna toplota.

Primer 13.65

Izračunajmo, koliko snega pri 0°C bi lahko stalili na štedilniku z enim kilogramom črnega premoga, če ne bi bilo toplotnih izgub.

Če se vsa toplota pri sežigu premoga porabi za taljenje ledu, dobimo s pomočjo enačb 13.10 in 13.8 ter tabele 13.7:

$$q_t m_\ell = q_s m,$$

$$q_t m_\ell = m \cdot \frac{q_s}{q_t} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{34 \cdot 10^6 \text{ J/kg}}{3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} = 102 \text{ kg}.$$

Z enim kilogramom premoga bi lahko stalili največ 102 kg ledu. Seveda pa se pri kurjenju v štedilniku po navadi koristno porabi le majhen del toplote, preostala pa segreva štedilnik in njegovo okolico ali pa jo odnesejo topli plini skozi dimnik.



13.4.1 Človek in okolica



Človeško telo dobi energijo za svoje delovanje v obliki hrane. Dnevno pojemo za 8 do 10 MJ hrane. Če bi to energijo ($Q \approx 9 \text{ MJ}$) enakomerno porabljali preko celega dne (24 ur), bi lahko delali z močjo okoli 100 W:

$$P_{\text{pov}} = \frac{Q}{t} = \frac{9 \cdot 10^6 \text{ J}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 104 \text{ W}.$$

Predpostavimo, da približno četrtno te energije porabimo za mehansko delo, ki je notranje, kot na primer pretakanje krvi po telesu, dihanje, in zunanje delo (gibanje delov telesa). Torej nam ostane za segrevanje dnevno okoli 7 MJ energije. Ta energija bi lahko segrela človeško telo z maso 60 kg za

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{7 \cdot 10^6 \text{ J}}{60 \text{ kg} \cdot 3470 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} = 34 \text{ K}.$$

Povprečno specifično toploto človeškega telesa smo prebrali iz tabele 13.4. Vidimo,

da bi se naše telo v enem dnevu segrelo za približno 30 stopinj, če ne bi imelo možnosti oddajanja toplote. Če živimo v okolju, ki je hladnejše od naše telesne temperature (37°C) in je naša telesna aktivnost le zmerna, potem odvečne toplote ni težko oddajati v okolico – in je zato segrevati.

V primeru na strani 222 smo ugotovili, da je v sobi velikosti $4 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ približno 82 kg zraka. S svojo oddano toploto bi lahko tako sobo segreli kar za 82 stopinj, če seveda ne bi iz nje uhajalo nič toplote.

$$\Delta T = \frac{7 \cdot 10^6 \text{ J}}{82 \text{ kg} \cdot 1040 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} = 82 \text{ K}.$$

Kaj pa, kadar je temperatura okolice primerljiva ali višja od telesne temperature? Tedaj toplote ne moremo preprosto oddajati okolici, saj toplota vedno prehaja samo s toplejšega na hladnejše mesto.

Rešitev je potenje. Če si ogledamo tabelo 13.6, vidimo, da je specifična izparilna toplota vode zelo velika, kar $22,6 \times 10^5 \text{ J/kg}$. Odvečno energijo, približno 7 MJ dnevno, lahko porabimo tako, da izparimo približno 3 kg vode, saj je

$$m = \frac{Q}{q_i} = \frac{7 \cdot 10^6 \text{ J}}{22,6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} = 3,1 \text{ kg}.$$

To pomeni: pri visoki temperaturi ali večji telesni dejavnosti potrebujemo za ohlajanje okoli 3 litre vode dnevno, to je v povprečju en kozarec na uro (0,13 ℓ).

13.5 Temperatura zmesi

Kadar prideta v stik dva predmeta, ki imata različni temperaturi, začne teči toplota s toplejšega na hladnejšega. To traja vse dotlej, dokler se temperaturi obeh predmetov ne izenačita. Toplejši predmet je pri tem oddal toploto in se ohladil do končne temperature, hladnejši pa je enako količino toplote prejel in se segrel na končno temperaturo.

Primer 13.66

V 1 kg vode s temperaturo 10°C damo stekleno kroglo z maso 0,1 kg, ki smo je pred tem segreli na 100°C . Izračunajmo končno temperaturo.

Zapišimo začetno in končno stanje.

Začetno stanje:

voda: $m_v = 1 \text{ kg}$, $T_v = 10^\circ\text{C} = 283 \text{ K}$,

steklo: $m_s = 0,1 \text{ kg}$, $T_s = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$.

Končno stanje: masi ostaneta nespremenjeni, voda in steklo imata enako temperaturo (T_k).

Steklo se je ohladilo in pri tem oddalo toploto:

$$Q = m_s c_s (T_s - T_k).$$

To toploto pa je sprejela voda in se pri tem segrela:

$$Q = m_v c_v (T_k - T_v).$$

Če ti enačbi izenačimo, dobimo:

$$m_s c_s (T_s - T_k) = m_v c_v (T_k - T_v),$$

iz česar izračunamo končno temperaturo:

$$T_k = \frac{m_s c_s T_s + m_v c_v T_v}{m_s c_s + m_v c_v}.$$

Če v to zvezo vstavimo podatke iz tabele 13.4, dobimo:

$$T_k = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 840 \text{ J/kgK} \cdot 373 \text{ K} + 1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK} \cdot 283 \text{ K}}{0,1 \text{ kg} \cdot 840 \text{ J/kgK} + 1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK}}$$

$$T_k = 284,8 \text{ K} = 11,8^\circ\text{C}.$$

Uporabili smo temperaturo v stopinjah Kelvina, čeprav bi v tem primeru, ko so pomembne le razlike temperatur, lahko računali tudi s stopinjami Celzija. Specifično toploto vode smo zaokrožili kar na 4200 J/kgK .



Tabela 13.8: Približna metabolna poraba energije 65 kilogramskega človeka

Dejavnost	W
spanje	70
sedenje	115
lahka aktivnost (oblačenje, prehranjevanje, pospravljanje)	230
zmerna aktivnost (hoja)	460
tek (15 km/h)	1150

Enako velja tudi, kadar zmešamo dve tekočini z različnima temperaturama. Čeprav nastane homogena zmes, lahko skupno temperaturo še vedno razumemo tako, da je toplejša tekočina oddala toploto hladnejši in se pri tem ohladila na končno temperaturo.

Primer 13.67

Izračunajmo, kolikšna je temperatura vode, ki jo dobimo, če 2 kg vode pri temperaturi 15°C zmešamo z 0,5 kg vode s temperaturo 80°C .

Podobno kot v prejšnjem primeru izenačimo toploto, ki jo prejme hladnejša voda (označimo z 2), s tisto, ki jo odda toplejša (1), in dobimo:

$$m_1 c (T_1 - T_k) = m_2 c (T_k - T_2).$$

Temperatura zmesi je zato:

$$T_k = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 301 \text{ K} = 28^\circ\text{C}.$$

Specifična toplota vode je v vseh členih enaka in smo jo zato okrajšali.

• • •

Primer 13.68

Izračunajmo še, koliko ledu pri 0°C moramo dodati v 1 kg vode pri 60°C , da se bo ohladila na 20°C .

Ko se bo ohladila za $\Delta T_v = 40 \text{ K}$, bo voda oddala toploto:

$$Q = m_v c_v \Delta T_v.$$

Led se bo najprej stalil in za to porabil toploto $Q_1 = m_\ell q_t$, nato pa se bo nastala voda segrela še za $\Delta T_2 = 20 \text{ K}$, za kar potrebuje toploto $Q_2 = m_\ell c_v \Delta T_2$. Celotna prejeta toplota je torej $Q_1 + Q_2$ in je enaka toploti, ki jo je oddala voda pri ohlajanju:

$$m_v c_v \Delta T_v = m_\ell q_t + m_\ell c_v \Delta T_2.$$

Iz tega dobimo maso ledu:

$$m_\ell = \frac{m_v c_v \Delta T_v}{q_t + c_v \Delta T_2}.$$

Če v to zvezo vstavimo podatke, dobimo:

$$m_\ell = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK} \cdot 40 \text{ K}}{3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 4200 \text{ J/kgK} \cdot 20 \text{ K}} = 0,40 \text{ kg}.$$

• • •

V zadnjem primeru smo videli, da je led zelo učinkovit za ohlajanje, ker je njegova talilna toplota sorazmerno velika. Če bi v prejšnjem primeru vodi pri 60°C dodali namesto ledu vodo s temperaturo 0°C , bi potrebovali kar 2 kg vode, da bi dosegli končno temperaturo 20°C (glej primer 21 na strani 239).

13.6 Prevajanje toplote

Toplota se lahko prenaša s toplejšega na hladnejše mesto na različne načine: s prevajanjem, konvekcijo ali sevanjem. Voda v posodi, ki smo jo postavili na kuhalnik, se segreje, čeprav ni v neposrednem stiku z grelno ploščo. Stene posode namreč prevajajo toploto – jo sprejemajo od grelne plošče in jo oddajajo vodi.

Čeprav voda prevaja toploto veliko slabše kot kovine, pa se vendar vsa voda v posodi segreva precej enakomerno. Ko se voda na dnu posode segreje, se poveča njena prostornina in zato zmanjša gostota. Zaradi vzgona se začne toplejša voda dvigati v posodi, hladnejša z vrha pa jo nadomešča. V posodi zato nastanejo tokovi, ki tekočino mešajo in tako prenašajo toploto z enega mesta na drugo – toplota se torej prenaša z mešanjem ali **konvekcijo**.

Vsako telo pa oddaja toploto tudi s **sevanjem**, ki se širi po praznem prostoru ali prozorni snovi. Jožef Stefan (1835–1893) je že v drugi polovici devetnajstega stoletja odkril, da je količina sevane toplote (gostota toplotnega toka) sorazmerna četrti potenci absolutne temperature (T^4) telesa, ki seva. Odvisna pa je tudi od površine telesa, zelo temne površine sevajo več toplote kot svetleče se površine. Hkrati pa več vpadlega toplotnega sevanja tudi sprejmejo – telesa s temnimi površinami sprejmejo več toplote kot svetla in se zato v enakem času bolj segrejejo.

Izkaže se, da mirujoči človek v normalnem okolju odda približno polovico toplote s sevanjem. Zaradi sevanja se nam lahko zgodi, da nas v sobi s toplim zrakom še vedno zebe, če so stene mrzle. Tedaj stene sprejemajo naše toplotno sevanje in ga zelo malo vračajo. Lahko pride do tega, da oddajamo več toplotne energije, kot je telo sproti proizvaja, zato bi se začeli ohlajati, če ne bi povečali proizvodnje toplote, na primer z mehanskim delom (tresenjem, gibanjem itn.).

Podrobneje si oglejmo **prevajanje toplote**. Če sta dve telesi v stiku, potem toplota teče s toplejšega telesa na hladnejše. Količino toplote (Q), ki preteče v določenem času (t) preko dane površine (S), imenujemo **gostota toplotnega toka**:

$$j = \frac{Q}{t \cdot S}. \quad (13.11)$$

Poskusi so pokazali, da je gostota toplotnega toka sorazmerna razliki temperatur (ΔT) na obeh straneh plasti, ki toploto prevaja, debelini (ℓ) te plasti in seveda vrsti snovi – njeni toplotni prevodnosti (λ):

Tabela 13.9: Toplotna prevodnost snovi (λ)

Snov	Toplotna prevodnost [W/m.K]
srebro	420
baker	390
zlato	310
aluminij	210
medenina	90
jeklo	50
svinec	35
živo srebro	29
led	2,2
beton	1,2
steklo	0,8
voda	0,6
opeka	0,6
les	0,05 – 0,4
papir	0,15
usnje	0,15
človeško tkivo	0,2
pluta	0,042
steklena volna	0,04
puh	0,025
zrak	0,023

$$j = \lambda \frac{\Delta T}{\ell}. \quad (13.12)$$

V tabeli 13.9 je podana toplotna prevodnost nekaterih snovi. Vidimo, da imajo kovine zelo veliko toplotno prevodnost in zato dobro prevajajo toploto, led in voda prevajata toploto dosti manj, les, papir in človeško tkivo pa še manj. Zrak zelo slabo prevaja toploto, zato za toplotno izolacijo pogosto uporabljamo snovi, ki vsebujejo veliko zraka, na primer volna, puh, pluta, steklena volna itn.

Primer 13.69

Izračunajmo, kako debelo plast puhaste oddeje potrebujemo, da se pri spanju ne ohajamo, če je zunanja temperatura 0 °C, pokrita telesna površina

1 m² in naše telo proizvaja 100 W toplotne moči več, kot jo potrebuje za svoje delovanje.

Ker je $j = \frac{Q}{t \cdot S} = \frac{P}{S}$, nam da enačba 13.12

$$\ell = \lambda \frac{S}{P} \Delta T.$$

Razlika med telesno temperaturo in temperaturo zunanosti je $\Delta T = 37$ K, toplotno prevodnost pa preberemo iz tabele 13.9:

$$\ell = 0,025 \text{ W/m} \cdot \text{K} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{100 \text{ W}} \cdot 37 \text{ K} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm}.$$

Vidimo, da potrebujemo vsaj 9 mm debelo puhasto oddejo. Pri tem smo predpostavili, da je toplotna izolacija na spodnji strani telesa tako dobra, da tam ni toplotnih izgub. Če pa bi na primer spali v puhasti spalni vreči na hladni podlagi, bi bila celotna površina večja in bi zato potrebovali debelejšo plast puha.

• • •

Primer 13.70

Po navadi je največji del toplotnih izgub v stanovanju posledica prevažanja toplote skozi okenska stekla. Če v dobro toplotno izolirano steno namestimo dodatno okno s 3 mm debelo stekleno šipo velikosti 2 m × 3 m, izračunajmo, s kolikšno dodatno močjo moramo pozimi ogrevati sobo, da lahko še vedno vzdržujemo notranjo temperaturo 20 °C, kadar je zunanja temperatura −10 °C.

$$P = \frac{Q}{t} = \lambda S \frac{\Delta T}{\ell}.$$

Ker je razlika temperatur $\Delta T = 30$ K, dobimo:

$$P = 0,8 \text{ W/m} \cdot \text{K} \cdot 6 \text{ m}^2 \cdot \frac{30 \text{ K}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 48 \cdot 10^3 \text{ W} = 48 \text{ kW}.$$

Če pomislimo, da so moči električnih peči 1–2 kW, vidimo, da bo zelo težko v teh razmerah zagotoviti notranjo temperaturo 20 °C. Še najboljše bo, če zmanjšamo velikost okna ali pa izboljšamo njegovo toplotno izolacijo. Navadno steklo lahko na primer zamenjamo z dvojnim toplotnim steklom (termopan), kjer je med dvema plastema stekla plast plina ali razrečenega zraka, ki predstavlja dodatno toplotno izolacijo.

• • •

Primer 13.71

Izračunajmo še, kolikšna bo temperatura v sobi v prejšnjem primeru, če jo ogrevamo z grelcem z močjo 2 kW in lahko toplotno prevajanje skozi stene zanemarimo.

Kot smo videli, notranja temperatura ne bo ostala 20 °C, saj bi tedaj potrebovali grelec moči 48 kW, da bi nadomestil izhajajoči toplotni tok. Temperatura v sobi se bo zato začela nižati in to toliko časa, dokler ne bo izhajajoči toplotni tok ravno enak moči peči. Izračunajmo, kolikšna bo tedaj razlika temperatur:

$$\Delta T = \frac{P\ell}{\lambda S} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,8 \text{ W/m} \cdot \text{K} \cdot 6 \text{ m}^2} = 1,25 \text{ K}.$$

Pri tako slabi toplotni izolaciji nam bo uspel grelec z močjo 2 kW segreti notranjost sobe le za malo več kot eno stopinjo nad temperaturo zunanosti.



13.7 Povzetek

$$\Delta \ell = \alpha \ell \Delta T$$

α – koeficient linearnega raztezka

$$\Delta V = \beta V \Delta T$$

β koeficient volumnskega raztezka

Za homogene trdne snovi velja: $\beta = 3\alpha$.

$$0 \text{ K} = -273,15 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

temperatura v stopinjah Kelvina $\approx$ temperatura v stopinjah Celzija + 273

Plinska enačba: $pV = nRT$

n – število molov

$R = 8,315 \text{ J}/(\text{mol K})$ - splošna plinska konstanta

T – absolutna temperatura (v stopinjah Kelvina)

$$Q = mc\Delta T$$

Q – toplota

c – specifična toplota

Talilna toplota: $Q = q_t m$

q_t – specifična talilna toplota

Izparilna toplota: $Q = q_i m$

q_i – specifična izparilna toplota

$$\text{Prevajanje toplote: } j = \frac{Q}{t \cdot S} = \lambda \frac{\Delta T}{\ell}$$

j – gostota toplotnega toka

λ – toplotna prevodnost

ℓ – debelina plasti



Slika 13.8: Na cestnih mostovih pogosto opazimo prekinitve cestišča.

13.8 Vprašanja

1. Ali lahko pojasniš, kaj je povzročilo deformacijo železniške proge na sliki 13.2 na strani 217?
2. Za koliko se poleti podaljša 40 metrov dolg kovinski most, če se segreje za 20 stopinj?
3. Zakaj na cestnih mostovih pogosto opaziš prekinitve cestišča, kot je prikazano na sliki 13.8?
4. Zakaj imajo cevi plinovodov in toplovodov na določenih razdaljah kolena $\cap$?
5. Ali bi bila voda primerno sredstvo za tekočinski termometer? Zakaj?
6. Kakšne so omejitve termometra s čistim alkoholom? (glej podatek za etanol v tabeli 13.8)
7. Zakaj vremenoslovci trdijo, da ne smemo termometra za merjenje temperature zraka nikoli postaviti na sonce?
8. Pozimi pri temperaturi 0°C natočimo v avto 50 litrov bencina in avto postavimo v ogrevano garažo s temperaturo 18°C . Če je bil rezervar do vrha poln, koliko litrov pričakuješ, da bo izteklo preko roba?
9. Zakaj je včasih lažje odpreti pokrov kozarca za vlaganje, če smo ga prej segreli z vročo vodo?

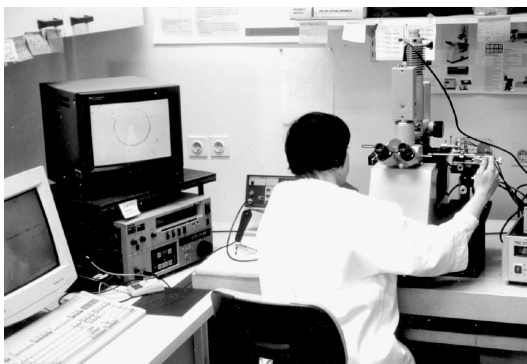
10. Železno kroglo, ki ima pri 20°C premer 10 cm, segrejemo na 100°C . Kaj se zgodi z njenim premerom?
11. Prazno steklenico zamašimo in jo segrejemo od 20 do 100°C . Izračunaj, za kolikokrat naraste tlak zraka v njej.
12. Če je bil začetni tlak zraka v steklenici v prejšnjem primeru 1 bar, izračunaj, kolikšna je pri 100°C sila na zamašek, če je njegov premer 1 cm.
13. Izračunaj, kolikšna je masa zraka v steklenici s prostornino 1 l pri 20°C in tlaku 1 bar.
14. V plinski bombici (slika 13.9) s prostornino 400 ml je 225 g butana. Izračunaj, kolikšen je pri sobni temperaturi tlak v njej. Butan je plin s kemijsko formulo C_4H_{10} .
15. Na bombici v prejšnjem primeru smo prebrali podatek, da je ne smemo segreti nad 50°C . Zakaj? Izračunaj, kolikšen je največji tlak, ki ga plinska bombica še prenese.
16. 1 kg vode s temperaturo 20°C začnemo segrevati. Izračunaj:
 - koliko toplote moramo dovesti, da jo segrejemo do 100°C ,
 - koliko toplote moramo dovesti, da vso vodo izparimo,
 - kolikšna je prostornina nastale vodne pare, če je zunanji tlak 1 bar.
17. Izračunaj, za koliko stopinj lahko segreje grelec, ki ima moč 1 kW v treh minutah tri litre vode.
18. Izračunaj, v kolikšnem času segrejemo z 2-kilovatnim grelcem 1 liter vode od 20°C do 100°C .



Slika 13.9: Majhen zložljiv kuhalnik na plinske bombice, ki se uporablja predvsem pri turah v gore

19. V 2 kg vode s temperaturo 40°C nalijemo 0,5 kg vode s temperaturo 15°C . Izračunaj, kolikšna je temperatura zmesi.
20. V 1 kg vode s temperaturo 40°C damo kos ledu s temperaturo 0°C in maso 0,1 kg. Kaj dobimo?
21. Izračunaj, koliko vode s temperaturo 0°C moramo doliti enemu kilogramu vode pri 60°C , da se bo ohladila na 20°C .
22. Kos železa z maso 0,5 kg segrejemo na 400°C in damo v 1 kg vode s temperaturo 20°C . Kaj se zgodi?
23. Zakaj pravijo kuharji, da nas lahko para veliko bolj opeče kot vrela voda, čeprav imata obe temperaturo 100°C ?
24. Sobo velikosti $4\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2\text{ m}$ v stari leseni koči s stenami debeline 20 cm ogrevamo s pečjo moči 2 kW. Kolikšna bo temperatura v sobi, če je zunaj 5°C ?
25. Izračunaj najmanjšo količino bencina, ki jo potrebujemo, da zavremo 1ℓ vode, ki ima na začetku temperaturo 0°C (slika 13.1).
26. Izračunaj najmanjšo količino bencina, ki jo potrebujemo, da iz snega pri 0°C pripravimo 1ℓ vrele vode (slika 13.1). Rezultat primerjaj z izračunom v prejšnji nalogi.

SVETLOBA IN OPTIKA



Slika 14.1: Med preprostim povečevalnim steklom in dragim laboratorijskim mikroskopom je danes velika razlika, ne samo v ceni, ampak tudi v zapletenosti izdelave. In vendar je komaj pred sto petdesetimi leti povečava sestavljenega mikroskopa dosegla zmogljivost ene same leče. Slika prikazuje optični mikroskop, povezan s sistemom za računalniško obdelavo slike.

14.1 Uvod

Steklo so poznali že Rimljani. Njegovo odkritje so pripisovali Feničanom. Rimski zgodovinar Plinij starejši poroča, da so si feničanski mornarji nekega dne na obali želeli skuhati kosilo. Ker niso našli primernih kamnov, so postavili posode kar na kose natrona, ki so ga tovorili na ladji. Natron je naraven natrijev karbonat, tedaj zelo cenjen pri balzamiranju umrlih. Čeprav segret natron pomešan s peskom zares tvori steklo, zgodovinarji vseeno dvomijo o resničnosti te pripovedi in menijo, da so prvo steklo najverjetneje izdelali pred dobrimi štirimi tisočletji v Mezopotamiji.

Zelo zgodaj so opazili, da okrogla steklena posoda, napolnjena z vodo, ustvari na steni obrnjeno sliko predmetov, ki stojijo pred posodo. Če pogledamo od blizu skozi tako posodo, vidimo bližnje predmete povečane. Ugotovili so, da ima podobne lastnosti vsaka krogla iz prozorne snovi ali celo samo njen del. Manjši deli krogelne površine so bili celo bolj uporabni, saj so ustvarili lepšo, bolj ostro sliko. Po navadi so kos stekla krogelno zbrusili na eni ali na obeh straneh in te izdelke poimenovali "leča", saj so bili podobni zrnom leče. Take leče danes imenujemo zbiralne leče, ker zberejo snop vzporednih žarkov v eni sami točki. Ta točka je gorišče leče. Če pa žarki izhajajo iz različnih delov kakšnega predmeta, lahko zbiralna leča zbere te žarke tako, da nastane za njo na zaslonu slika tega predmeta.

Spoznali so, da si starejši ljudje, ko z leti postajajo vse bolj daljnovidni, lahko uspešno pomagajo pri gledanju bližnjih predmetov z lečami. Tako so nastala očala. Konec 13. stoletja so že poznali povečevalno steklo in uporabljali očala.

14.2 Lom svetlobe

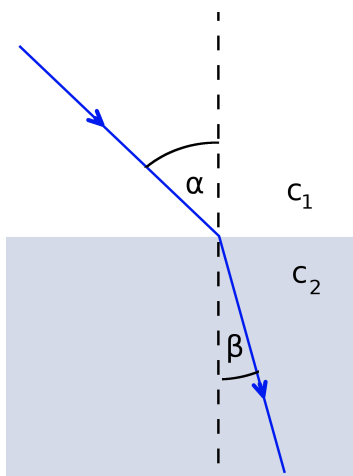
Izvor svetlobe, kot je na primer Sonce, seva svetlobo v vse smeri. Svetloba je elektromagnetno valovanje, ki se po naših vsakdanjih izkušnjah giblje v ravni smeri. Zato si je najenostavneje predstavljati svetlobo, kot da bi bila sestavljena iz neskončno tankih ravnih črt, ki jih imenujemo **žarki**. Tak žarkovni model je seveda le približek, ki nam pa vseeno omogoča razumeti marsikatero lastnost gibanja in zaznavanja svetlobe.

Kadar svetlobni žarek preide iz ene snovi v drugo, se lomi (slika 14.2). Če je hitrost svetlobe v prvi snovi c_1 in v drugi c_2 ter sta α in β vpadni in lomni kot, potem velja

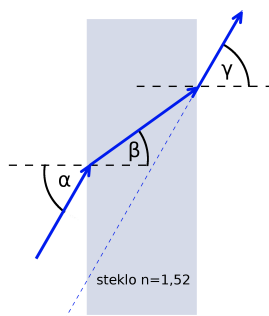
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (14.1)$$

To zvezo po navadi imenujemo **lomni zakon** ali Snellov zakon, v francosko govorečih krajih pa jo poznajo tudi pod imenom Descartov zakon.

V optiki pogosto namesto o hitrosti svetlobe v snovi raje govorimo o lomnem količniku snovi (n), ki je razmerje med hitrostjo svetlobe v praznem prostoru (va-



Slika 14.2: Pri prehodu iz enega sredstva v drugo se svetlobni žarek lomi, če sta hitrosti svetlobe c_1 in c_2 različni.



Slika 14.3: Lom svetlobe na ravni stekleni šipi. Žarek izhaja pod kotom, ki je enak vpadnemu kotu ($\gamma = \alpha$), je pa vzporedno premaknjen.

kuumu) in hitrostjo svetlobe v snovi. Hitrost svetlobe v praznem prostoru (c_0) je namreč ena od osnovnih naravnih konstant ($c_0 = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$) in je največja hitrost, ki jo je na kakršenkoli način sploh mogoče doseči. Ker je hitrost svetlobe v zraku le zanemarljivo manjša kot v vakuumu ($c_{\text{zrak}} = 0,9997c_0$) lahko za praktično uporabo upoševamo kar $c_{\text{zrak}} \approx c_0$ in $n_{\text{zrak}} \approx 1$ (glej tabelo 14.1).

Primer 14.72

Oglejmo si, kaj se zgodi s svetlobnim žarkom, ki pade pod kotom 60° na 1 cm debelo ravno stekleno šipo, kot je prikazano na sliki 14.3. Iz tabele 14.1 preberemo, da je lomni količnik navadnega stekla $n = 1,52$ zato nam da lomni zakon (enačba 14.1):

$$\sin \beta = \sin \alpha \frac{n_{\text{zrak}}}{n_{\text{steklo}}} = \sin \alpha \frac{1}{n_{\text{steklo}}}.$$

Tabela 14.1: Lomni količnik snovi pri 20 °C za svetlobo valovne dolžine 589 nm

	n
diamant	2,7
navadno steklo	1,52
jantar	1,52
kremenovo steklo	1,46
etilni alkohol	1,36
voda	1,333
led	1,31
zrak	1,00029

Z našimi podatki tako dobimo:

$$\sin \beta = \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{1,52} = 0,57.$$

Kot β je torej $34,7^\circ$.

Izračunajmo še, pod kakšnim kotom (γ) izstopa žarek na drugi strani iz stekla. Za ta primer zapišemo lomni zakon kot:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_{\text{zrak}}}{n_{\text{steklo}}},$$

kar nam da:

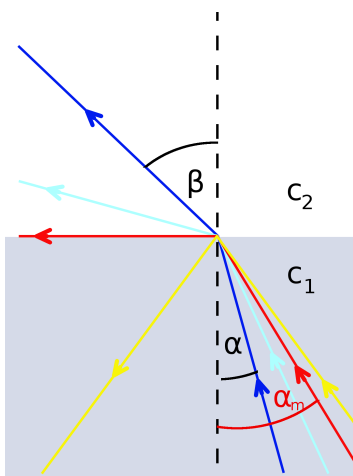
$$\sin \gamma = \sin \beta \cdot n_{\text{steklo}} = \sin \alpha \cdot \frac{1}{n_{\text{steklo}}} \cdot n_{\text{steklo}} = \sin \alpha.$$

Vidimo, da iz ravne šipe svetlobni žarek izstopa pod kotom, ki je enak vpadnemu kotu in to je neodvisno od debeline šipe. Se pa pri prehodu skozi ravno šipo žarek vzporedno premakne in sicer sorazmerno z debelino šipe.

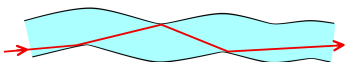


Pogljemo še, kaj se lahko zgodi, kadar svetloba prehaja iz sredstva z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim. Tak pojav lahko opazujemo kadar na primer prehaja svetloba iz vode v zrak. Lomni kot (β) je tedaj večji od vpadnega kota (α). Kot je prikazano na sliki 14.4, lomni kot s povečevanjem vpadnega kota narašča, vendar je to mogoče le dokler lomni kot ne doseže vrednosti 90° . Vpadni kot, pri katerem je lomni kot 90° imenujemo **mejni kot** in je

$$\sin \alpha_m = \frac{n_2}{n_1}, \quad (14.2)$$



Slika 14.4: Pri prehodu iz sredstva z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lahko pride do popolnega odboja, če je vpadni kot (α) dovolj velik, večji od mejnega kota α_m .



Slika 14.5: Svetloba se popolno odbija pri prehodu skozi optično vlakno.

kjer smo v lomnem zakonu (enačba 14.1) upoštevali, da je $\sin \beta = 1$. Če je vpadni kot večji od mejnega kota potem lom svetlobe med sredstvoma ni več mogoč in se vsa svetloba odbije. Ta pojav imenujemo **popoln odboj**.

Popolni odboj praktično uporabljamo med drugim tudi za optična vlakna. Svetloba, ki vstopi na enem koncu v tako prozorno plasično vlakno se na stenah vlakna zaradi vpadnega kota, ki je večji od mejnega, popolno odbija in pride zato skoraj v celoti na drugi konec vlakna (slika 14.5). To po navadi velja tudi, če optično vlakno zvijemo v zelo zapletene oblike. Če veliko takih vlaken združimo v optično cev jo lahko uporabljamo za prenos slike, kar nam omogoča na primer ogled notranjih organov v medicini.

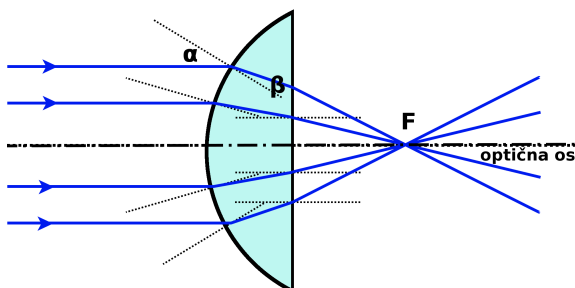
Primer 14.73

Izračunajmo mejni kot za popoln odboj v vodi. Iz tabele 14.1 preberemo lomni količnik vode, za zrak privzamemo $n = 1$ in dobimo:

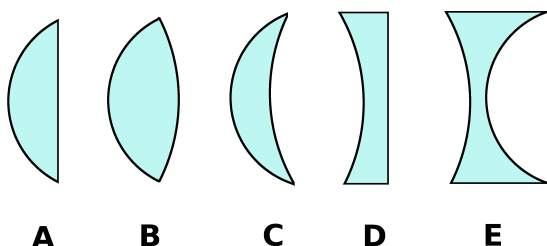
$$\sin \alpha_m = \frac{1}{1,333} = 0,750,$$

kar nam da $\alpha_m = 48,6^\circ$.

...



Slika 14.6: Svetlobni žarki se lomijo na ukrivljeni površini.



Slika 14.7: Nekaj tipičnih oblik leč: plankonveksna (A), bikonveksna (B), konveksnokonkavna (C), plankonkavna (D) in bikonkavna (E).

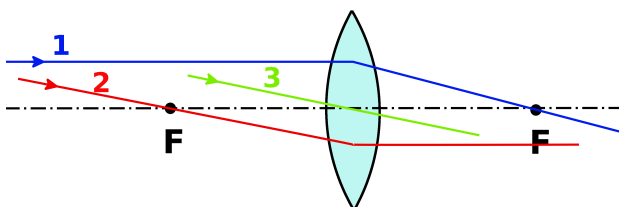
14.3 Leče

V primeru 14.72 smo videli, da se svetlobni žarek pri prehodu skozi dve vzporedni ploskvi samo premakne. Kaj pa se zgodi, kadar ploskvi nista vzporedni? Kot vidimo na sliki 14.6 se vzporedni žarki, ki padejo na kroglasto ukrivljeno površino lahko lomijo tako, da se zberejo v eni točki. To je primer zbiralne ali konveksne leče. Simetrijsko os leče imenujemo **optična os**, **gorišče** pa je točka, kjer se zberejo žarki, ki padejo na lečo vzporedno z optično osjo. Razdaljo od leče do gorišča pa imenujemo **goriščna razdalja**.

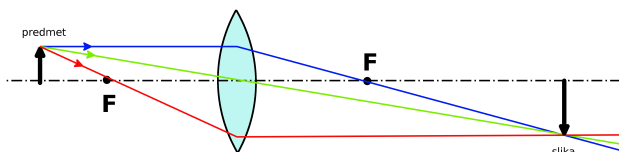
Leče so lahko različnih oblik - nekaj primerov je prikazanih na sliki 14.7.

Kadar so leče zelo tanke v premerjavi z goriščno razdaljo lahko preslikavo take leče enostavno narišemo. Pri tem si pomagamo s tremi tipičnimi žarki, ki so za konveksno lečo prikazani na sliki 14.8. Žarek št.1 je vzporeden z optično osjo, zato se v leči lomi tako, da gre skozi gorišče kakor smo ugotovili že na sliki 14.6. Ker je preslikava leče vedno simetrična glede na smer žarka mora veljati tudi, da se žarek, ki gre skozi gorišče v leči lomi tako, da je vzporeden optični osi (2. žarek na sliki 14.6). Tretji prikazani žarek pa gre skozi temo (sredino) leče. Tu je tangenta na površino leče navpična in če je leča dovolj tanka tak žarek ne spremeni svoje smeri - podobno kot v primeru na strani 243 (Primer 14.72).

Ti trije žarki zadostujejo, da lahko narišemo katerokoli preslikavo s tanko kon-



Slika 14.8: Tipični žarki pri preslikavi s konveksno lečo.



Slika 14.9: Preslikava s konveksno lečo.

veksno lečo. Kot primer je na sliki 14.9 prikazana preslikava predmeta (puščica na levi strani slike) s konveksno lečo. Narišemo, kako lača preslika vrh predmeta. S te točke izhajajo svetlobni žarki v vse smeri, vendar pa za preslikavo narišemo le tri tipične žarke. Vidimo, da se žarki zberejo v točki na desni strani za goriščem. Ta leča torej ustvari obrnjeno sliko. Ker se žarki, ki izhajajo iz vsake posamezne točke predmeta zberejo na drugi strani leče, bi tam dobili sliko, če bi tja postavili zaslon. Zato pravimo, da je ta slika realna.

Če razdaljo od predmeta do leče označimo z a , razdaljo od leče do slike z b ter goriščno razdaljo z f lahko zapišemo enačbo leče:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (14.3)$$

Ta enačba velja za vse vrste leč in nam omogoča, da lahko iz dveh izmerjenih podatkov izračunamo tretjega.

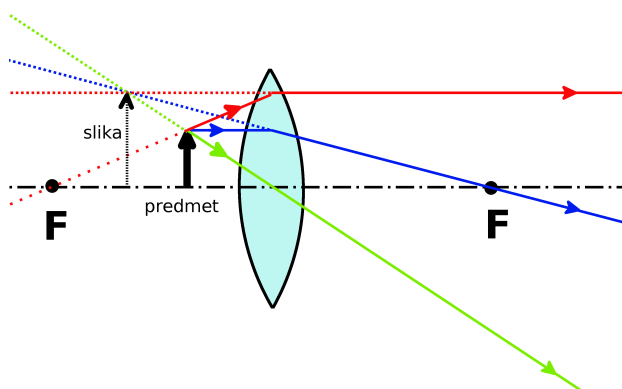
Primer 14.74

Izračunajmo, kolikšna je goriščna razdalja leče, ki ustvari sliko 1 m oddaljenega predmeta pol metra za lečo. Iz enačbe 14.3 dobimo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{1\text{m}} + \frac{1}{0,5\text{m}},$$

kar nam da $\frac{1}{f} = 3 \text{ m}^{-1}$. Goriščna razdalja je torej $f = \frac{1}{3} \text{ m} = 33 \text{ cm}$.

• • •



Slika 14.10: Preslikava s konveksno lečo: predmet stoji med lečo in goriščem. Slika je navidezna, pokončna in povečana.

Zaradi enačbe leče (14.3) je pogosto navada, da namesto goriščne razdalje leče navajamo njeno recipročno vrednost ($\frac{1}{f}$), kar imenujemo **dioptrijska**. V prejšnjem primeru (Primer 14.74) je tako dioptrijska leče $D = 1/f = 3 \text{ m}$.

Oglejmo si še, kaj se zgodi, če predmet postavimo med konveksno lečo in gorišče. Na sliki 14.10 vidimo, da v tem primeru leča žarkov ne zbere. Če bi gledali z druge strani leče (na sliki z desne), bi se nam videlo, kot da žarki izhajajo iz določene točke na isti strani leče, kot je predmet (na sliki z leve strani leče). Zato ni realne slike, ampak pravimo, da je ta navidezna. Kot vidimo na sliki je slika pokončna in povečana. Na tak način lahko uporabljamo konveksno lečo kot **povečevalno steklo**.

Primer 14.75

Izračunajmo, kje nastane slika leče z goriščno razdaljo 50 cm kadar predmet postavimo 25 cm pred lečo. Zopet uporabimo enačbo leče (enačba 14.3) in dobimo

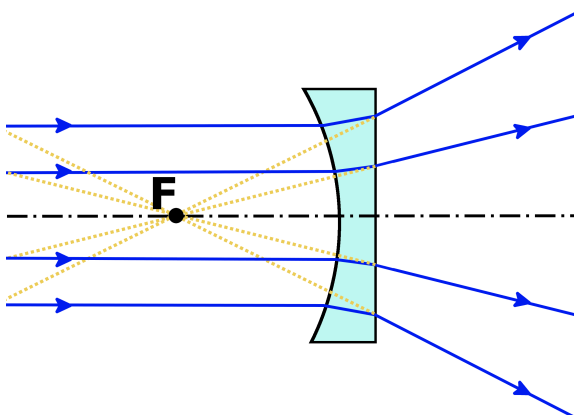
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{50 \text{ cm}} - \frac{1}{25 \text{ cm}} = -0,02 \text{ cm}^{-1},$$

kar nam da $b = \frac{1}{-0,02} \text{ cm} = -50 \text{ cm}$. Vidimo, da je razdalja slike od leče negativna, kar pomeni, da slika ne nastane za lečo, ampak pred njo.

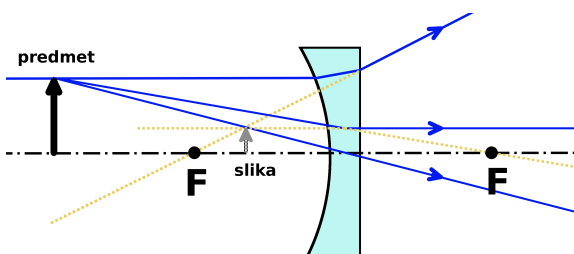
• • •

Konkavno lečo imenujemo tudi razpršilna leča. Zakaj je tako nam pojasni pogled na sliko 14.11. Konkavna leča namreč snop vzporednih žarkov razprši. Če so ti žarki vzporedni z optično osjo, potem je za lečo videti, kot da bi vsi izhajali iz ene same točke na optični osi. To točko imenujemo gorišče konkavne leče.

Podobno kot pri konveksni leči lahko narišemo preslikavo tako, da upoštevamo tipične žarke. Primer je prikazan na sliki 14.12. Vidimo, da je slika navidezna,



Slika 14.11: Konkavna leča snop vzporednih žarkov razprši.

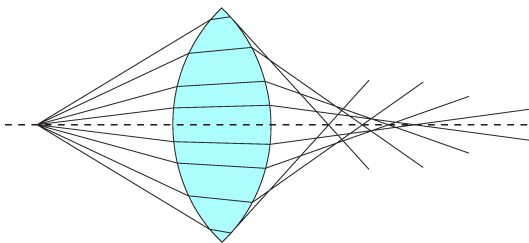


Slika 14.12: Preslikava s konkavno lečo. Slika je pokončna in navidezna.

pokončna in pomanjšana. Za izračun preslikave lahko tudi v tem primeru uporabimo enačbo leče (enačba 14.3), le da moramo upoštevati, da je goriščna razdalja negativna.

14.4 Krogelna in barvna napaka leč

S pomočjo lomnega zakona (enačba 14.1) lahko izračunamo in narišemo, kako se žarki lomijo pri prehodu skozi lečo. Primer je prikazan na sliki 14.13. Ugotovimo, da se žarki, ki padejo na lečo na robu, bolj lomijo od tistih, ki gredo skozi lečo bližje njeni sredini. Gorišče vsake leče s krogelno površino zato ni ena sama točka in slika predmeta zato ni ostra. To imenujemo krogelna napaka (sferična aberacija, napaka pasov) leče in pravzaprav sploh ni napaka, ampak lastnost leč, katerih površina je del krogle. Krogelna površina preprosto ni taka, da bi vzporedne žarke zbrala v isti točki. Njena prednost je le v tem, da jo je mogoče izdelati. Še danes, pri vsem tehnološkem napredku, v splošni uporabi ni prav dosti leč z nekrogelno površino. Proizvajalci namesto tega raje izdelujejo zapletene sestave



Slika 14.13: Krogelna napaka (sferična aberacija). Leča s krogelno površino ne zbere žarkov, izhajajočih iz iste točke (levo), na istem mestu.

Tabela 14.2: Lomni količnik v odvisnosti od barve (valovne dolžine) svetlobe

	Rdeča (656 nm)	Zelena (546 nm)	Vijolična (435 nm)
kronsko steklo	1,507	1,511	1,520
kremenovo steklo	1,615	1,624	1,642
CaF ₂	1,432	1,435	1,439
kremen	1,542	1,546	1,554
voda	1,331	1,334	1,340

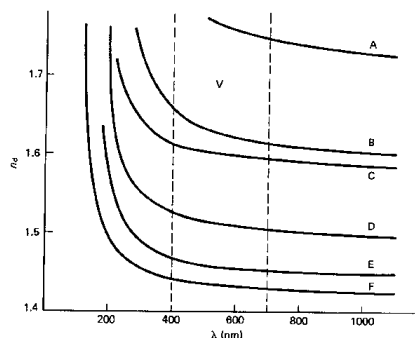
krogelnih leč iz različnih vrst materialov. Razloga sta dva: cena in tradicija.

Druga pomembna lastnost vseh snovi pa je, da je njihov lomni količnik odvisen od valovne dolžine (barve) svetlobe (tabela 14.2 in slika 14.14). Čim večja je valovna dolžina svetlobe, tem manjši je lomni količnik. To pomeni, da se na primer pri prehodu iz zraka v steklo modra svetloba bolj lomi kot rdeča, in je zato tudi goriščna razdalja leče drugačna za žarke različnih valovnih dolžin.

14.5 Krogelno in barvno korigirani objektiv

Proti koncu osemnajstega stoletja so se pojavili prvi "akromatski" mikroskopi. S slučajnim poskušanjem so uspeli sestaviti tako kombinacijo zbiralne in razpršilne leče, narejene iz dveh različnih vrst stekla, da so se vzporedni žarki dveh barv zbrali v isti točki. Taka kombinacija je hkrati tudi v veliki meri zmanjšala krogelno napako leče (slika 14.15). Baje je prvi prišel do te ideje londonski odvetnik Chester Moor Hall, ki se je z optiko ukvarjal le ljubiteljsko. Spoznanje je hotel ohraniti zase, zato je leta 1733 dal dvema optikoma izdelati leči iz različnih stekel – enemu razpršilno lečo, drugemu pa zbiralno. A optika nista leč zbrusila sama, ampak sta ju oba naročila pri istem izdelovalcu, ki se je imenoval George Bass. Ko je ta izvedel, da je naročnik obeh leč isti, je leči zložil skupaj in odkril skrivnost. Bass

Slika 14.14: Shematski prikaz odvisnosti lomnega količnika od valovne dolžine (disperzija) za različne optične snovi: gosto kremenovo steklo (A), redko kremenovo steklo (B), barijev kremen (C), borosilikatno kronsno steklo (D), staljen kremen (E), fluorit (F). Med črtkanima črtama je področje vidnega spektra (V).



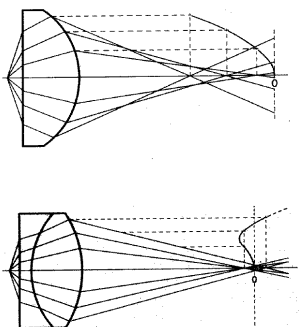
pa spoznanja ni obdržal zase in kmalu je več londonskih optikov začelo izdelovati "akromatske" leče. Eden od njih, John Dolland, je kasneje celo uspel to idejo patentirati.

Vendar so na tak način lahko izdelali le akromatske pare leč s sorazmerno veliko goriščno razdaljo. Šele ko je Amici leta 1830 prišel na idejo, da bi namesto ene same leče z majhno goriščno razdaljo lahko uporabil več akromatskih parov, je sestavljen mikroskop zares prehitel preprostega enolečnega. Razumevanje principov delovanja leč je po letu 1850 povzročilo, da so, namesto zamudnega poskušanja, leče pričeli izračunavati. Ko sta leta 1866 v Jeni začela sodelovati Carl Zeiss in Ernst Abbe, so se prvič pojavili mikroskopi, kot jih poznamo danes. Abbe je sestavil leta 1883 "apokromatski" objektiv, ki je bil korigiran za svetlobo treh barv in je bil sestavljen iz leč, narejenih iz sedmih različnih vrst stekla. To je bilo mogoče tudi zato, ker je bila v bližini Jene tedaj dobra steklarna Otta Schotta.

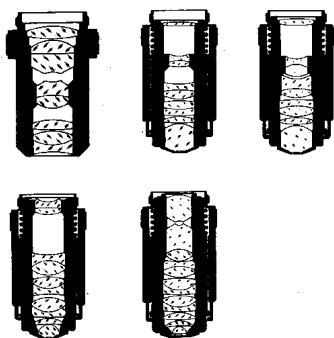
14.6 Mikroskop

14.6.1 Preprost mikroskop

V 17. stoletju je bila Nizozemska svetovno trgovsko središče. Med drugim so trgovali z volno, blagom in dragimi kamni. Kvaliteto niti so pregledovali s povečevalnimi stekli, drage kamne pa so znali tudi zelo natančno brusiti. V Delftu je tedaj živel suknar Anthoni van Leeuwenhoek (1632–1723). Konjiček, ki mu je posvetil vse svoje življenje, je bil brušenje leč. Več kot 400 jih je izdelal in večina ni bila večja od bučikine glavice. Skozi svoje leče je opazoval vse okoli sebe, od umazane vode, do kože in las. Bil je prvi, ki je videl bakterije, praživali in spermije. Opazoval je tudi zgradbo mišic in podrobno opisal rdeče krvne celice. Njegove leče so bile tako majhne, da so imele goriščno razdaljo okoli 1 mm in so zato približno 250-krat povečale. Opazovanje s tako majhnimi lečami je bilo zelo nerodno.



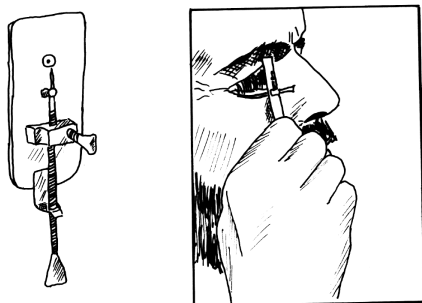
Slika 14.15: Zgornja leča ima veliko krogelno napako, saj se žarki, ki gredo skozi rob leče, zberejo veliko bliže leči, kot žarki, ki gredo skozi blizu središča. To napako je mogoče zmanjšati z uporabo sestava dveh leč iz različnih vrst stekel (spodnja slika). Črta na desni strani obeh slik je diagram odvisnosti oddaljenosti žarkov od središča leče kot funkcija lege njihovega gorišča.



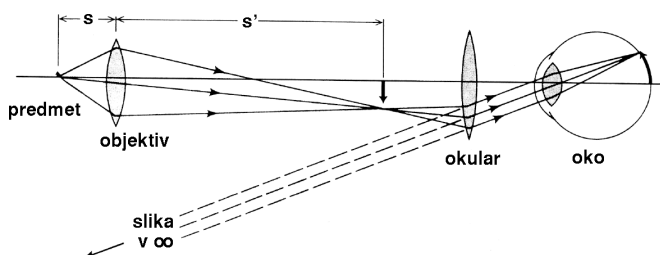
Slika 14.16: Današnji objektivni so sestavljeni iz velikega števila leč. Prikazanih je nekaj Leitzovih objektivov, od katerih je zadnji (Pl Apo öl 100/1.32) narejen iz dvanajstih leč.

Najbolj neprijetno je bilo to, da je bilo treba pritisniti drobno lečo prav na oko (slika 14.17). Leča je bila pritrjena na posebnem držalu, kjer je bila tudi iglica, na katero je Leeuwenhoek nataknil opazovani vzorec. Z dvema vijakoma je to iglico lahko premikal in tako dobil ostro sliko izbranega izseka predmeta. Le malokdo je obvladal to spretnost gledanja in Leeuwenhoekovim opazovanjem dolgo niso prav posebno verjeli. Marsikatero njegovo odkritje so potrdili šele stoletje kasneje.

Leeuwenhoek je pošiljal opise svojih opazovanj londonski Kraljevi družbi. Skoraj štiristo jih je bilo in kmalu je postal znan po vsem svetu. Pošiljali so mu nenavadne žuželke, obiskovali so ga vladarji, a to ni zmotilo njegovega mirnega življenja. Zanimal ga je le mikroskopski svet, denar, ki ga je dobival od sinekure kot hišnik mestne hiše v Delftu pa mu je omogočil, da se je do svojega devetdesetga leta ukvarjal le z brušenjem leč in opazovanjem.



Slika 14.17: Van Leeuwenhoekov mikroskop (levo) in način gledanja z njim (desno)

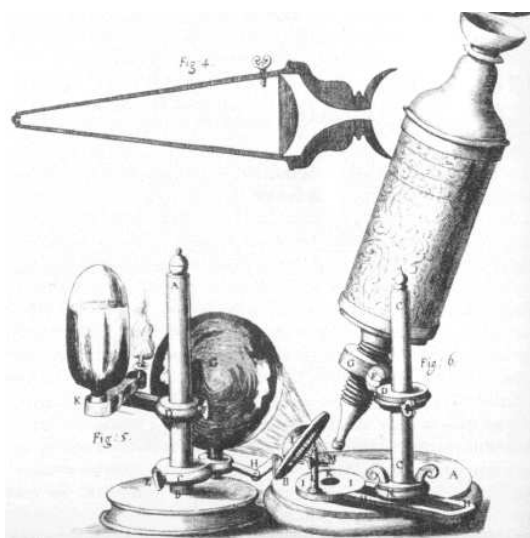


Slika 14.18: Shema sestavljenega mikroskopa

14.6.2 Sestavljen mikroskop

V tem času pa so poznali tudi že mikroskop, sestavljen iz dveh leč. Namesto da bi pritisnili oko ob drobno zbiralno lečo, so sliko te lečice opazovali skozi drugo povečevalno steklo. Pri sestavljenem mikroskopu predmet (objekt), ki ga opazujemo, postavimo malo dalje od gorišča zbiralne leče z majhno goriščno razdaljo (slika 14.18). To lečo imenujemo objektiv. Objektiv ustvari realno in obrnjeno sliko predmeta, ki jo gledamo skozi drugo zbiralno lečo. Tej približamo oko in jo zato imenujemo okular. Razdalja med objektivom in okularjem je izbrana tako, da nastane slika predmeta v gorišču okularja. Sliko, ki jo v našem očesu ustvarijo snopi vzporednih žarkov, tako lahko opazujemo brez posebnega napora.

Sestavljen mikroskop je v začetku sicer omogočal dokaj udobno opazovanje, a povečave so bile zelo skromne. Iz leta 1625 so najstarejše skice sestavljenega mikroskopa. Tudi ta je nastal na Nizozemskem. V Londonu je v 17. stoletju živel Robert Hooke (1635–1703). Bil je skrbnik poskusov pri Kraljevi družbi in se je ukvarjal z zelo različnimi področji, od astronomije, preko fizike do biologije. Ostal je znan po svojem proučevanju elastičnosti. Njegovo spoznanje, da je raztezek vzmeti sorazmeren sili, danes imenujemo Hookov zakon. Hooke je leta 1665



Slika 14.19: Mikroskop Roberta Hooka, kot je bil narisani v knjigi *Micrographia* (1665)

izdal knjigo *Micrographia*, kjer je opisal in narisal svoja opazovanja s sestavljenim mikroskopom. Ogledal si je vse, kar mu je prišlo pod roke: od uši, pa do listov rastlin. Bil je prvi, ki je opisal zgradbo rastlin – sestavljene naj bi bile iz pravilno razporejenih sobic, celic.

Njegov mikroskop je bil narejen iz dveh zbiralnih leč v bogato okrašeni cevi (slika 14.19). Svetlobo sveče je na opazovani predmet usmerjala steklena kroglja, napolnjena z vodo. Povečava Hookovega mikroskopa je bila v primerjavi z Leeuwenhoekovim zelo skromna, le 30- do 40-kratna.

Razlog, da so se sestavljeni mikroskopi toliko slabše odrezali kot ena sama preprosta leča, je v krogelni in barvni napaki leč. Še tako natančno zbrušena leča, katere krivina je del krogle, ne zbere vseh vzporednih žarkov v eni sami točki. Pri mikroskopu, sestavljenem iz dveh leč, so se napake obeh leč medsebojno ojačale ter pri večjih povečavah sliko povsem popačile.

Sestavljeni mikroskopi so bili tedaj bolj igrače za višjo družbo, kot pa resni raziskovalni instrumenti. Francoski anatom Bichat, začetnik histologije in patologije, na primer še okoli leta 1800 pri svojem delu ni uporabljal mikroskopa, ker: "je to naprava, ki vedno omogoča, da vidimo to, kar si želimo".

14.6.3 Posebne tehnike optične mikroskopije

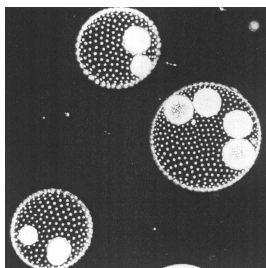
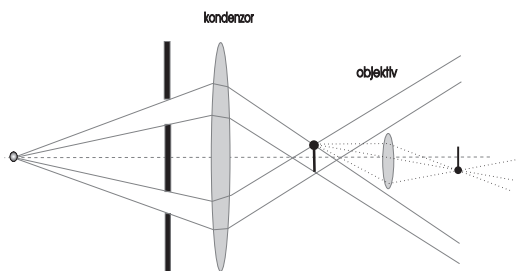
V prvi polovici dvajsetega stoletja je razvoj optičnega mikroskopa dosegel tako popolnost, da ni nihče več pričakoval kakšnihkoli bistvenih novosti v optični mikroskopiji. Vendar pa je tik pred drugo svetovno vojno Nizozemec Fritz Zernike

(1888–1966), profesor teoretične fizike na univerzi v Groningenu, poročal o novi mikroskopski tehniki, ki jo je imenoval tehnika faznega kontrasta. Ta metoda omogoča opazovanje predmetov, ki so skoraj prozorni in jih z običajnim optičnim mikroskopom sploh ne moremo videti. Za svoje delo je leta 1953 prejel Nobelovo nagrado. Do danes so iznašli še nekaj podobnih mikroskopskih tehnik in kaže, da se razvoj optične mikroskopije še vedno ni končal. Morda bo prav kombinacija mikroskopa in sistema za računalniško obdelavo slik omogočila naslednji korak v napredku optične mikroskopije.

Temno polje

Vzorec osvetlimo s snopom žarkov, ki padajo od strani (slika 14.20). Če je ta snop širši, kot je vhodna zenica objektiv, skozi mikroskop ne dobimo direktnih žarkov. Opazovano polje mikroskopa je zato temno. Na nekaterih delih vzorca pa se lahko vpadla svetloba tudi siplje. Tak del vzorca bomo videli kot svetel del na temnem ozadju. Kadar je sipanje dovolj veliko, lahko na tak način zaznamo celo delce, ki so premajhni, da bi jih lahko ločili z normalnim mikroskopom. Pred iznajdbo faznokontrastne mikroskopije so tehniko temnega polja uporabljali za opazovanje predmetov, ki jih niso mogli obarvati.

Slika 14.20: Shematski prikaz tehnike temnega polja



Slika 14.21: Slika, narejena s tehniko temnega polja (*Volvox aureus*)

Fazni kontrast

Faznokontrastna mikroskopija je zelo uporabna za opazovanje vzorcev, pri katerih so razlike v absorpciji zelo majhne. Pri normalnem opazovanju v svetlem polju je zato slika le malo kontrastna in so podrobnosti strukture vzorca neopazne. Fazno kontrastna mikroskopija pa spremeni fazne razlike med žarki, ki gredo skozi dele vzorca z različnim lomnim količnikom, v amplitudne razlike, ki jih lahko naše oko zazna.

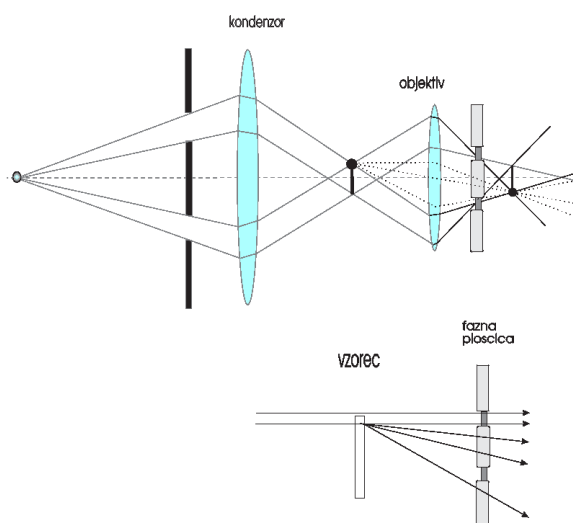
Na sliki 14.22 je shematsko prikazan faznokontrastni mikroskop. Podobno kot pri tehniki temnega polja, je tudi tu med svetilom in kondenzorjem zaslonka, ki prepušča le ozek curek svetlobe. Ta zaslonka je po navadi v obliki kolobarja. Za lečo objektiva pa je fazna ploščica. Ta je narejena iz dveh delov, temnejšega in svetlejšega. Njena oblika in velikost sta taki, da gredo nesipani (direktni) žarki le skozi temnejši del. V vzorcu pa se del svetlobe tudi siplje. Ti žarki gredo lahko tudi skozi svetlejši del fazne ploščice. Primerjajmo sedaj žarek, ki gre tik ob opazovanem predmetu, s tistim, ki se je po prehodu skozi predmet sipal (slika 14.22 spodaj). Če je lomni količnik okoliškega sredstva n_1 , debelina predmeta d in njegov lomni količnik n_2 , je razlika med fazama valovanja

$$\delta = \frac{2\pi\nu}{c_0}(n_1 - n_2)d,$$

kjer je c_0 hitrost svetlobe v praznem prostoru. Če ima na danem mestu za objektom nesipano valovanje obliko $\sin\varphi$ in je fazna razlika δ zelo majhna, potem je sipano valovanje

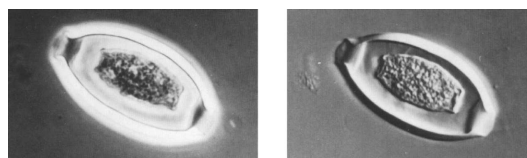
$$\sin(\varphi + \delta) \approx \sin\varphi + \delta\cos\varphi = \sin\varphi + \delta\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Sipano valovanje je tako sestavljeno iz dveh delov. Prvi niha v fazi z nesipanim valovanjem, drugi pa ima veliko manjšo amplitudo δ in je fazno premaknjen za $\frac{\pi}{4}$. To fazno razliko lahko povečamo na $\frac{\pi}{2}$, če je svetli del fazne ploščice, skozi katerega gre sipano valovanje, primerno debelejši od temnejšega dela. Tako fazno ploščico imenujemo pozitivno kontrastno. Za fazno ploščico direktni žarek interferira s sipanim. Če temnejši del fazne ploščice direktni žarek toliko oslabi, da je njegova amplituda primerljiva z amplitudo drugega dela sipanega valovanja (po navadi 70–75 %), taka žarka destruktivno interferirata. Rob predmeta bo zato videti temnejši od ozadja. Vsak del vzorca z večjim lomnim količnikom od okolice bo tako na sliki videti temno obrobljen (slika 14.23 levo). Fazna razlika pa nastane v splošnem med direktnim in sipanim žarkom tudi, kadar gresta oba skozi opazovani predmet, saj se dolžini njunih poti razlikujeta. Zato bo tudi notranjost predmeta, ki ima drugačen lomni količnik kot okolica, videti temnejša. Ker pa se pri interferenci energija svetlobe ne more izgubiti, je vsako temno področje na sliki obkroženo s



Slika 14.22: Faznokontrastni mikroskop (zgoraj). Spodnja slika shematsko prikazuje prehod direktnega žarka in sipanih žarkov skozi fazno ploščico. Temnejši del fazne ploščice direktni žarek oslabi, svetlejši del pa poveča fazo sipanega dela za $\frac{\pi}{2}$.

Slika 14.23: Slika jajčeca *Trichuris trichura*, narejena s tehniko faznega kontrasta (levo) in Hoffmanovim kontrastom (desno)

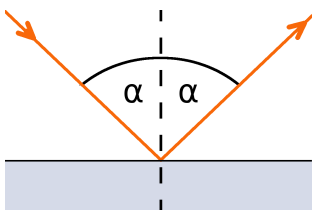


svetlim sijem. Ta sij navadno imenujemo *halo* in je značilen za vse faznokontrastne slike.

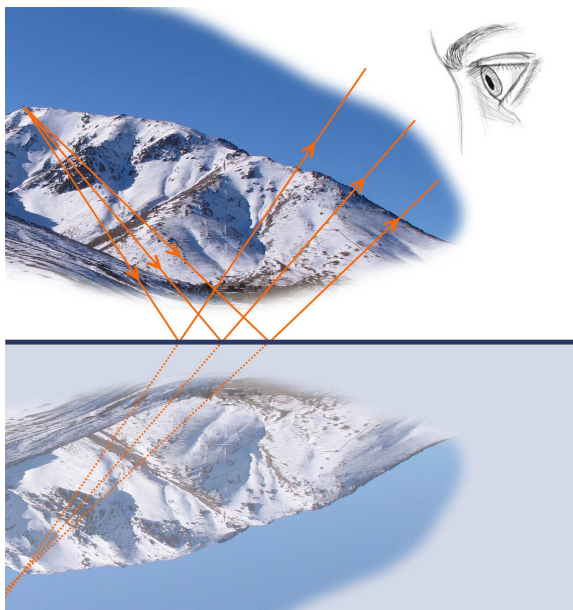
14.7 Odboj svetlobe in zrcala

Na mejni površini med snovema z različnim lomnim količnikom se svetloba odbije. Pri tem velja, da je odbojni kot enak vpadnemu kotu (slika 14.24). To spoznanje imenujemo **odbojni zakon**. Pri tem sta vpadni in odbojni kot kota med žarkom in navpičnico na mejno površino.

Posledica lomnega zakona je, da vidimo obrnjeno sliko, če se svetlobni žarki odbijajo od površine. Na sliki 14.25 je shematsko prikazan odboj svetlobnih žarkov, ki izhajajo iz ene točke pokrajine. Žarki se na površini vode zrcalno odbijejo in opazovalcu se vidi, kot da bi ti žarki prihajali iz točno določene točke pod gladino jezera. Enako velja za vse žarke, ki izhajajo iz posameznih delčkov pokrajine. Zato vidimo v vodi sliko pokrajine - ta je obrnjena in videti je, kot da bi nastala nekje



Slika 14.24: Odbojni zakon: svetlobni žarek se na meji dveh sredstev odbije pod kotom, ki je enak vpadnemu kotu.



Slika 14.25: Prikaz zrcalnega odboja pokrajine na mirni gladini gorskega jezera (slika 14.26).

pod gladino jezera (slika 14.26). Ta slika je navidezna in tak odboj imenujemo **zrcalni odboj**.

Slika 14.27 prav tako prikazuje jezero. Vendar v njem ne vidimo zrcalne slike pokrajine. Kar je razlog za to? Ali v tem primeru odbojni zakon ne velja? Ne, odbojni zakon že velja, vendar je veter nakodral vodno gladino in zato so v različnih delih vode navpičnice na vodno gladino različne. Zato so odbiti žarki bolj ali manj razpršeni v različne smeri. Takemu razpršenemu odboju pravimo **difuzni odboj**.

Zrcalo je torej vsaka površina, ki je dovolj gladka, da na njej pride do zrcalnega odboja. Gladina jezera je ravna, prav tako tudi zrcalo v kopalnici. Videli smo, da v tem primeru nastane navidezna, zrcalno obrnjena slika zadaj za površino zrcala.

Kaj pa če zrcalo ni ravno? Tudi v tem primeru lahko za račun uporabimo enačbo leče (enačba 14.3), slike pa narišemo podobno kot pri lečah.

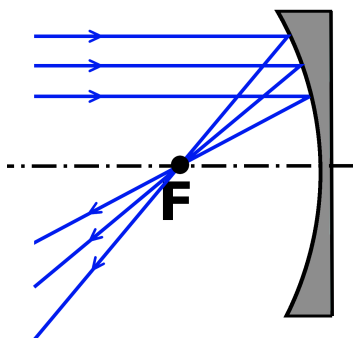
Oglejmo primer nastanka slike pri konkavnem zrcalu. Na sliki 14.28 vidimo,



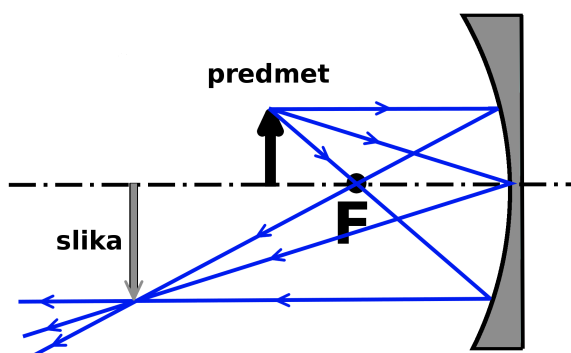
Slika 14.26: Zrcalni odboj pokrajine na mirni gladini gorskega jezera.



Slika 14.27: Difuzni odboj na gladini jezera.



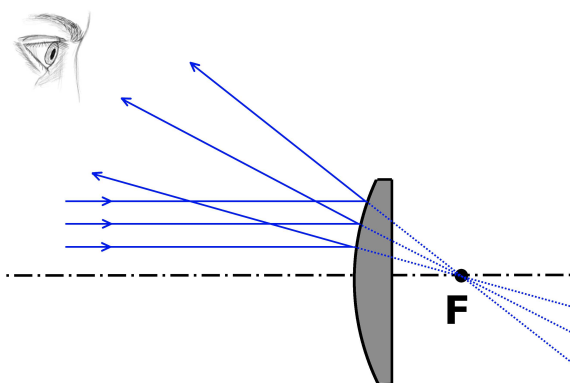
Slika 14.28: Snop žarkov, ki so vzporedni optični osi zbere konavno zrcalo v eni točki - v gorišču (F).



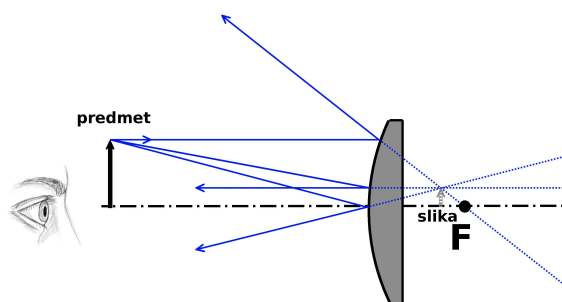
Slika 14.29: Nastanek slike pri konavnem zrcalu - slika je realna in obrnjena.

da konavno zrcalo zbere v eni točki snop žarkov, ki nanj padajo vzporedno z optično osjo. To točko imenujemo gorišče zrcala. Sedaj lahko podobno kot pri lečah narišemo preslikavo tega zrcala (slika 14.29). Primerjaj to sliko s preslikavo konveksne leče (slika 14.9).

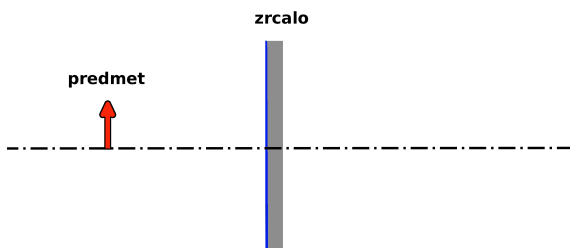
Konveksno zrcalo pa razprši vpadni snop žarkov. Če je ta vzporeden z optično osjo, je videti, kot da bi prihajal iz ene same točke za zrcalom (slika 14.30). Podobno kot pri lečah ali konavnem zrcalu lahko tudi v tem primeru narišemo nastanek slike kot to prikazuje slika 14.32. Slika je v vsakem primeru navidezna in pokončna.



Slika 14.30: Snop žarkov, ki so vzporedni optični osi se odbije na konveksnem zrcalu tako, da je videti, kot da bi izhajali iz ene točke za zrcalom - iz gorišča (F).



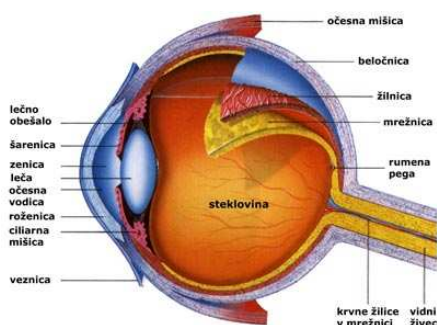
Slika 14.31: Preslikava s konveksnim zrcalom. Navidezna slika nastane za zrcalom.



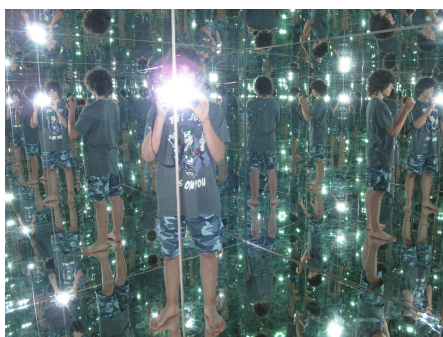
Slika 14.32: Ravno zrcalo (vprašanje št. 9).

14.8 Vprašanja

1. Izračunaj, za koliko se v primeru 14.72 na strani 243 premakne svetlobni žarek pri prehodu skozi stekleno šipo.
2. Nariši, kako bi se lomil žarek v zraku med dvema steklenima ploščama: žarek prihaja iz stekla v zrak ter gre v drugo stekleno ploščo. Primerjaj rezultat s sliko 14.3.
3. Nariši, kako preslika zbiralna leča predmet, ki je od nje oddaljen za dve goriščni razdalji.
4. Kolikšna je povečava v prejšnjem primeru? (Povečava je razmerje med velikostjo slike in velikostjo predmeta.)
5. Kako preslika zbiralna leča predmet, ki je od nje oddaljen tri goriščne razdalje? Kolikšna je sedaj povečava?
6. 60 cm pred konveksno lečo z dioptrijo 2 m^{-1} postavimo predmet. Kje nastane slika in kakšna je? Nariši preslikavo.
7. Nariši preslikavo leče v primeru 14.75 na strani 248. Iz slike določi povečavo leče.
8. 60 cm pred konkavno lečo z goriščno razdaljo $-0,5 \text{ m}$ (tj. z dioptrijo -2 m^{-1}) postavimo predmet. Kje nastane slika in kakšna je? Nariši preslikavo.
9. Na sliki 14.32 nariši kako preslika predmet ravno zrcalo. Kje nastane slika in kakšna je?
10. Izračunaj, kje nastane slika predmeta, ki stoji 1 m pred konkavnim zrcalom z goriščno razdaljo 50 cm. Nariši, skico. Kakšna je slika?



Slika 14.33: Zgradba očesa.



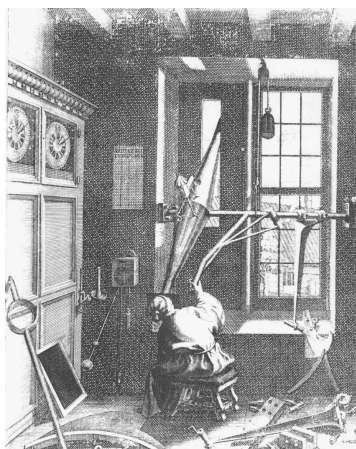
Slika 14.34: Z več ravnih zrcal lahko dosežemo zanimive efekte.

11. Nariši kako konkavno zrcalo preslika predmet, ki stoji med goriščem in zrcalom.
12. Nariši kako konvexno zrcalo preslika predmet, ki stoji bližje zrcalu, kot je njegova goriščna razdalja.
13. Izračunaj, kje nastane slika predmeta, ki stoji 1 m pred konvexnim zrcalom z goriščno razdaljo 50 cm. Nariši, skico. Kakšna je slika?
14. Nariši shemo sestavljenega mikroskopa in jo pojasni.
15. Kako lahko opaziš barvno napako leče?
16. Za kakšne vzorce je najbolj primerna tehnika temnega polja in za kakšne fazni kontrast?
17. Obnovi svoje znanje o zgradbi očesa (slika 14.33).
18. Zakaj starejši ljudje potrebujejo očala?
19. Ogled si sliko 14.34. Ali lahko pojasniš kako so postavljena zrcala?

SVETLOBA IN VESOLJE



Slika 15.1: Če je vesolje končno, kaj je potem zunaj njega? Slika iz astronomske knjige s konca devetnajstega stoletja.



Slika 15.2: Ole Roemer (1644–1710) je s svojim teleskopom natančno izmeril čas, ko luna Io enkrat obkroži Jupiter. Izmerjeno spreminjanje tega časa je pojasnil s končno hitrostjo širjenja svetlobe.

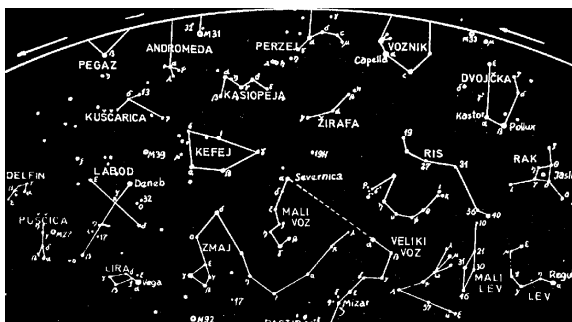
15.1 Hitrost svetlobe

Hitrost širjenja svetlobe je poskušal izmeriti že Galileo Galilei (1564–1642). S pokrito lučjo se je postavil na vrh griča, svojega pomočnika pa je poslal na sosednji grič in mu naročil, naj odkrije svojo luč takoj, ko zagleda svetlobo Galilejeve luči. In Galileo je odkrival svojo svetilko ter meril čas, ko je zagledal luč svojega pomočnika. Ta čas pa je bil tako kratek, da je Galileo lahko le ugotovil, da je bila časovna razlika predvsem posledica človeškega reakcijskega časa.

Prvi, ki je uspel dokazati, da je hitrost svetlobe sicer zelo velika, a ne neskončna, je bil danski astronom Ole Roemer. Natančno je določil obhodni čas Jupitrove lune Io. Njegove meritve so pokazale, da je ta čas malo daljši od povprečne vrednosti, kadar se Zemlja oddaljuje od Jupitra, in krajši, kadar se Zemlja na svoji poti okoli Sonca giblje proti Jupitru. Opazovanja je pojasnil s tem, da se pri oddaljevanju Zemlje od Jupitra razdalja, ki jo mora prepotovati svetloba od lune Io do nas v enem obhodnem času, podaljša. Svetloba tedaj do nas potuje dalj časa in zato izmerimo daljši čas, v katerem Io enkrat obkroži planet Jupiter.

V začetku tega stoletja pa je Albert A. Michelson (1852–1931) prvi izmeril hitrost svetlobe. Uporabil je podobno metodo kot Galileo, le da je na 35 km oddaljen vrh namesto človeka postavil zrcalo, ki je vpadlo svetlobo odbilo. Svojo svetilko pa je usmeril na osmerokotno vrteče se zrcalo. Kadar je bila frekvenca vrtenja tega zrcala ravno prav izbrana, je ena stranica odbila svetlobo svetilke proti oddaljenemu zrcalu, v drugi stranici pa je lahko z majhnim teleskopom opazoval odbito svetlobo. Iz izmerjene frekvence vrtenja zrcala in poznane oddaljenosti odbojnega zrcala je lahko izračunal hitrost svetlobe.

Michelson pa se s temi meritvami ni zadovoljil. Skupaj z E. W. Morleyem je zelo natančno izmeril hitrost svetlobe v različnih smereh. Od devetnajstega sto-



Slika 15.3: Skica severnega neba, kot ga vidimo 1. januarja ob 20. uri. Navada je, da si zaradi lažjega določanja lege na nebu predstavljamo zvezde združene v skupine – ozvezdja. Večina imen ozvezdij je povezanih s staro-grško mitologijo.

letja dalje je namreč veljalo prepričanje, da svetloba, podobno kot npr. zvok, za svoje razširjanje potrebuje sredstvo. To sredstvo, ki ga sicer niso mogli z nikakršnimi meritvami zaznati, so imenovali eter. A če bi eter zares obstajal, bi morala biti izmerjena hitrost svetlobe odvisna od tega, s kakšno hitrostjo se gibljemo skozi eter. In Zemlja bi morala na poti okoli Sonca potovati skozi eter z veliko hitrostjo. Michelson in Morley pa sta z natančnimi meritvami ugotovila, da je bila izmerjena hitrost svetlobe neodvisna od tega, v kateri smeri, glede na gibanje Zemlje, sta merila. Eter torej ne obstaja – svetloba se lahko širi po praznem prostoru. Hitrost svetlobe je konstantna – ni odvisna od hitrosti gibanja svetila ali opazovalca. Svetloba se lahko giblje tudi skozi različne snovi, vendar vedno počasneje kot v praznem prostoru.

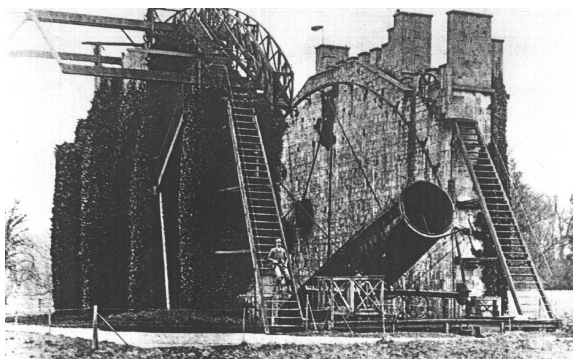
Od leta 1983 nam hitrost svetlobe služi za definicijo dolžinske enote (glej stran 16). Zato je hitrost svetlobe v praznem prostoru natančno 299 792 458 m/s.

15.2 Dopplerjev pojav pri svetlobi

Ker je svetloba valovanje, pričakujemo, da bi se pri relativnem gibanju svetila in opazovalca, kljub nespremenljivi hitrosti, spremenila frekvenca valovanja. Tak premik frekvence zares opazimo in ga enako kot pri zvoku (glej stran 207) imenujemo Dopplerjev premik. Izkaže se, da za hitrosti gibanja, ki so dosti manjše od svetlobne hitrosti, enačba 12.15, ki smo jo izpeljali za zvok, velja tudi za svetlobo.

15.3 Pogled v nebo

Sredi devetnajstega stoletja je angleški grof Rosse dal zgraditi astronomski teleskop, ki je nekaj časa užival sloves največjega in tudi najnevarnejšega teleskopa na svetu (slika 15.4). Z njim je opazil, da imajo nekatere meglice na nebu značilno



Slika 15.4: Leta 1845 je grof Rosse zgradil svoj astronomski teleskop. Dvometrsko zrcalo je zbiralo svetlobo na koncu 30 m dolge cevi, ki jo je premikal s sistemom vrvi in škripcev.

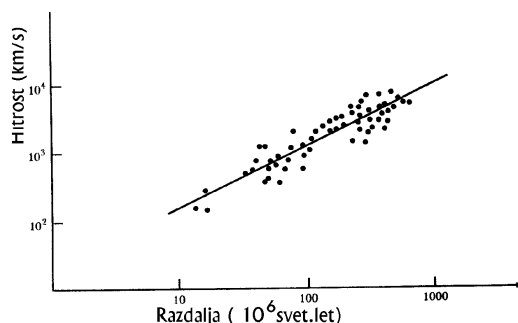


Slika 15.5: Meglica M51 ima značilno spiralno obliko.

spiralno obliko. Ena najlepših je meglica, imenovana M51, ki jo vidimo na sliki 15.5. Takoj se je postavilo vprašanje, kje je ta meglica. Grof Rosse je menil, da so vse spiralne meglice ogromni skupki zvezd, nekakšni "otoki v vesolju", v skladu s predstavo vesolja nemškega filozofa Immanuela Kanta. Večina astronomov pa je bila mnenja, da so te meglice veliko bliže, znotraj naše galaksije, Rimske ceste. To vprašanje je ostalo nerešeno dobrega pol stoletja, dokler se ni pojavil Edwin Hubble. Ta je leta 1923 v Andromedini meglici odkril več kefeidnih spremenljivk.

Kefeidne spremenljivke so utripajoče zvezde – njihova svetlost se na značilen način spreminja. Imenujejo se po zvezdi δ v ozvezdju Keфеja, ki utripa s periodo 5,4 let. To je bila prva poznana utripajoča zvezda. Leta 1784 jo je odkril devetnajstletni gluhonemi angleški ljubiteljski astronom. Zelo hitro je postalo jasno, da je frekvenca utripanja take zvezde sorazmerna njeni povprečni svetilnosti. Kefeidne spremenljivke so zato zelo pomembne za določanje razdalj v vesolju. Če izmerimo frekvenco utripanja kefeidne spremenljivke, lahko takoj določimo pravo svetilnost take zvezde. Ker pa vidimo zvezdo zaradi oddaljenosti manj svetlo (svetloba po jema s kvadratom razdalje), lahko določimo njeno oddaljenost.

Slika 15.6: Hitrost odmikanja v odvisnosti od oddaljenosti za nekaj spiralnih galaksij

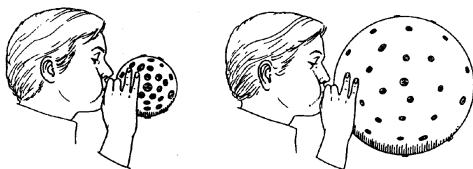


Iz časa utripanja je Hubble ugotovil, da morajo biti kefeidne spremenljivke v Andromedini meglici zelo svetle, čeprav je njihova svetloba videti šibka. Andromedina meglica je zato zunaj naše galaksije, okoli 2,25 milijona svetlobnih let oddaljena od nas. Od tedaj so določili oddaljenosti številnih meglenic in vse so zelo daleč. So ogromne skupine zvezd, podobne naši galaksiji.

Edwin Hubble je proučeval tudi svetlobo, ki jo sevajo oddaljene galaksije. Ugotovil je, da ima ta svetloba zelo velik Dopplerjev premik. Sklepal je, da se te galaksije hitro odmikajo od nas. Ko je narisal diagram odvisnosti hitrosti odmikanja od oddaljenosti galaksij, je dobil linearno odvisnost (slika 15.6). Smerni koeficient te premice danes imenujemo Hubblova konstanta. Njena vrednost je okoli $30 \text{ (km/s)/(Msv.let)}$. To pomeni, da se vse galaksije gibljejo proč od nas, in sicer tem hitreje, čim bolj so oddaljene. Če je galaksija milijon svetlobnih let (Msv.let) bolj oddaljena, je njena hitrost 30 km/s večja. A če se vse galaksije oddaljujejo, to pomeni, da so bile nekdaj vse na istem mestu. Iz Hubblove konstante ugotovimo, da je bilo to pred $2 \cdot 10^{10}$ leti. Tedaj je torej nastalo vesolje. Vse, kar je, je bilo v isti točki in se je začelo širiti. To imenujemo veliki pok. Ali je torej Zemlja v središču vesolja, če se vse, kar obstaja, oddaljuje od nas? Predstavljajmo si balon, na katerem so nalepljeni kovanci (slika 15.7). Ko balon napihujemo, se vsi kovanci oddaljujejo drug od drugega, gledano z enega vidimo, da se vsi oddaljujejo od njega, čeprav površina balona nima središča. Tako si tudi danes predstavljamo vesolje – podobno je površini balona, ki ga napihujemo, le da ima namesto dveh dimenzij tri. Prav tako kot krogelna površina, je vesolje končno, a nima nikjer meje.

Kakšna je prihodnja usoda vesolja, ne vemo. Morda se bo neprestano širilo, ali pa se bo širjenje končno ustavilo in se bo vesolje začelo krčiti, dokler se ne bo zopet združilo v eni točki – in vse se bo začelo znova.

Meritve zadnjih let so pokazale, da je v vesolju veliko več mase, kot jo vidimo. Iz gibanja galaksij so sklepali, da je okoli 70 % vse mase v vesolju v nam nevidni in tudi še nepoznani obliki – imenujemo jo temna snov. In kar je pri tem še najbolj zanimivo, je, da je izračunana količina temne snovi ravno taka, da je celotna masa



Slika 15.7: Razširjajoče se vesolje si lahko predstavljamo kot površino balona, na katerem so nalepljeni kovanci. Ko balon napihnemo, se vsi preostali kovanci oddaljujejo od vsakega izbranega kovanca.

blizu kritični masi, pri kateri pričakujemo ravno vesolje, katerega širjenje se ne ustavi.

15.4 Vprašanja

1. Kolikšna je hitrost svetlobe?
2. Koliko časa potrebuje svetloba od Sonca do Zemlje?
3. Kako pomagajo kefeidne spremenljivke določati razdalje v vesolju?
4. Kaj je Hubblova konstanta?
5. Kdaj je vesolje nastalo?
6. Če je vesolje končno, kaj je torej zunaj njega?

LITERATURA

Za dodaten študij posebej priporočena literatura je označena z zvezdico.

SPLOŠNA LITERATURA

1. ★ D. C. Giancoli. *Physics – Principles With Applications*. Prentice Hall International, 1991.
2. ★ R. Kladnik. *Osnove fizike za tehnike*. Državna Založba Slovenije, 1969.
3. ★ J. W. Kane and M. M. Sternheim. *Physics (Formerly Life Science Physics)*. John Wiley & Sons, 1978.
4. H. D. Young and R. A. Freedmann. *University Physics, 9th Edition*. Addison-Wesley, Pinnacle – India, 1998.
5. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. *Fundamentals of Physics*. J.Wiley & Sons, Inc., 1993.
6. H. C. Ohanian. *Physics*. W. W. Norton & Company, 1988.
7. G. B. Benedek and F. M. H. Villars. *Physics with Illustrative Examples from Medicine and Biology*, volume 1. Addison-Wesley, 1975.
8. I. Asimov. *Biografska enciklopedija znanosti in tehnike*. Tehniška založba Slovenije, 1978.
9. H. Breuer, R. Breuer. *Atlas klasične in moderne fizike*. DZS, 1993.
10. J. Strnad. *Uvod v fiziko*. Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, 1968.

VAJE

11. ★ B. Božič, J. Derganc, G. Gomišček, V. Kralj-Iglič, J. Majhenc, P. Peterlin, S. Svetina, B. Žekš. *Vaje iz biofizike*. Medicinska fakulteta v Ljubljani, 2003.
12. ★ T. Gyergyek, V. Kralj-Iglič, A. Iglič. *Vaje iz fizike I*. Fakulteta za elektro-tehniko, 2002.
13. L. A. Jenček. *Uvod v fizikalni praktikum*. Medicinska visoka šola v Ljubljani, 1953.
14. J. Hedgecoe. *Vse o fotografiji*. DZS, Ljubljana, 1981.
15. B. Kaye. *Chaos and Complexity*. VCH, 1993.

BIOMEHANIKA

16. ★ M. Williams and H. R. Lissner. *Biomechanics of Human Motion*. W. B. Saunders Co., 1962.
17. ★ M. Nordin, V. H. Frankel. *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System*. Lea & Febige, Philadelphia, London, 1989.
18. R. Chavanel. Bases mécaniques élémentaires de la biomécanique. *Kinésithérapie Scientifique*, 316:1–63, 1980.
19. M. Broer. *Efficiency of Human Movement*. W.B.Saunders Co., 1973.
20. D. B. Chaffin and G. B. J. Andersson. *Occupational Biomechanics*. J. Wiley & Sonc. Inc., 1991.
21. J. Sušnik. *Ergonomska fiziologija*. Didakta, 1992.
22. J. Hamill and K. M. Knutzen. *Biomechanical Basis of Human Movement*. Williams & Wilkins, 1995.
23. J. J. Collins and C. J. de Luca. *Upright, correlated random walks ... Chaos*, 5; 57–63, 1995.
24. E. F. Kreighbaum and M. A. Smith. *Sports and Fitness Equipment Design*. Human Kinetics, 1996.
25. J. Krajnik. *Biomehanika*. Inštitut RS za rehabilitacijo, Ljubljana, 2003.

TEKOČINE

26. S. Vogel. *Life in moving fluids. The physical biology of flow*. Princeton university press, 1994.
27. C. Houston. *Going higher – oxygen, man and mountains*. The mountaineers, Seattle 1998.
28. F. Berghold, W. Schaffert. *Handbuch der Trekking– und Expeditionsmedizin*. DAV Summit club, 2001.
29. L. Reynaud. La vie des glaciers. *Montagne et Alpinisme*, 14–19, Jan. 1993.

OPTIKA

30. W. S. Ellis. Glass. *National Geographic*, 184:73 – 69, Dec. 1993.
31. J. James. *Light Microscopic Techniques in Biology and Medicine*. Martinus Nijhoff Medical Division, 1976.
32. D. J. Rawlins. *Light Microscopy*. βios Scientific Publishers Ltd., 1992.

SVETLOBA IN VESOLJE

33. W. J. Kaufmann. *Universe*. W. H. Freeman and Company, 1987.
34. F. Hoyle. *Astronomija*. Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.
35. S. Hawking. *Vesolje v orehovi lupini*. Učila, 2002.
36. Special report: Four keys to cosmology. *Scientific American*, 32–63, feb. 2004.
37. J. P. Verdet. *Nebo, red in nered*. DZS, 1996.
38. P. Kunaver. *Kažipot po nebu*. DZS, 1975.

Slike

Zahvaljujem se vsem, ki so prispevali slike in ilustracije za ta učbenik, kakor tudi tistim, ki so dovolili objavo svojih slik. Za nekaj ilustracij ni bilo mogoče ugotoviti originalnega vira, zato prosim vse, ki bi ga poznali, naj mi to sporoče. Večina slik v tem učbeniku je originalno delo avtorja, nekatere pa so prirejene po drugih virih. Avtorji ostali slik so: 4.1 – mag. Miroljub Jakovljevič; 4.17 – mag. Jože Horvat; 6.1 – dr. Andrej Strahovnik, zlom leve goleni (1998); 11.9, 11.10, 11.23, 12.1.1, 12.1.1 – navodila za vaje iz biofizike Medicinske fakultete med leti 1988 in 1997.

Nekaj podatkov o slikah: slika 1.1 testiranje ravnotežja na Visoki šoli za zdravstvo (februar 2003), slika 2.1 Jezerska Baba z Ledin (jesen 1999), slika 3.1 Robbov vodnjak v Ljubljani (1999), slika 3.5 rečna ladja za prevoz potnikov preko reke Ganges v mestu Rishikesh v Indiji, slika 4.14 iz članka: Darja Rugelj, France Sevšek, "The effect of load mass and its placement on postural sway", Appl. Ergon. vol. 42, no. 6, str. 860-866, 2011, slika 5.1 narisano po fotografijah, slika 5.8 stabilometrične meritve v Biomehanskem laboratoriju Zdravstvene fakultete (januar 2010), slika 5.9 primer stabilograma za objavo v Medical & Biological Engineering & Computing (2014), stran 83 poševni stolp v Pisi (avgust 1998), slika 6.8 Pont du Gard (2001), stran 96 akropola v Atenah (2006), stran 97 ostanki rimskega mesta Gerasa (Jerash) v Jordaniji (2013), stran 97 skakalec z jezu v dolini Malta (2013), slika 8.1 smučanje po puščavskih peščinah in peščine Erg Chebbi v okolici vasi Merzouga v Maroku (1999), slika 9.1 testiranje telesne zmogljivosti na Visoki šoli za zdravstvo (februar 2003), slika 4.17 varilec v tovarni v Kranju leta 2004, slika 7.9 www.rosiewear.com/wp-content/uploads/2012/08/skater-rotation.jpg, slika 11.4 vas v katalonskih Pirinejih v pogorju Monte Perdido (2001), slika 11.26 vodni stolp v Damnoen Saduak, Tajska (2005), slika 11.12 kapalka za očesne kapljice Visine (2004), slika 11.20 in 11.28 curek vode iz vodovodne pipe z nastavkom za razpršilnik (2004), stran 201 krotilec kač v Indiji (Rajastan 1999), stran 207 Christian Doppler, vir: internet, stran 209 Dopplerjev pojav, vir: internet, stran 210 Ernest Mach, vir: en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Mach, stran 210 Machova fotografija udarnega vala iz leta 1887, Vir: internet, slika 13.1 bencinski kuhalnik MSR X-GK (2004), stran 229 večerja v Neue Prager Huetten (julij 2001), slika 13.9 plinski kuhalnik Markill in bombica mešanice propan/butan Primus (2004), slika 14.1 laboratorij za optično mikroskopijo na Inštitutu za biofiziko Medicinske fakultete v Ljubljani (1995), slika na naslovni strani: vzorec nepalskega pregrinjala

Stvarno kazalo

- Abbe, Ernst, 251
absolutna ničla, 214
Aconquilcha, Čile, 170
Ahil, 35
akcija, 105
akromatski objektiv, 250
Amici, Giovan Battista, 251
amplituda, 143
Andromedina meglica, 268
apokromatski objektiv, 251
Arhimed, 40, 170, 172
Arhimedes, 172
Arhimedov princip, 170
Aristotel, 40, 101
Avogadrovo število, 17
- bar, 164
barometer, 168, 169
barvno korigirani objektiv, 250
Bass, George, 250
Bernoulli, Daniel, 181
Bernoullijeva enačba, 180, 182
Berti, Gaspar, 168
Bichat, Marie François Xavier, 254
bimetalni trak, 219
biomehanika, 10
Boltzmannova konstanta, 222
Borelli, 11
- Celsius, Anders, 215
- čas, 17
- decibel, 205
deformacija pri nategu, 86
deformacija pri upogibu, 89
deformacija, strižna, 94
deformacija, torzijska, 92
Delft, 252
delo, 131, 132, 135
Descartov zakon, 242
diagram prostega telesa, 123
difuzni odboj, 258, 259
dinamični upor, 189
dinamika, 11, 100
dioptrija, 248
direkcijska konstanta, 92
dolžina, 17
Dolland, John, 251
Doppler, Christian, 207
Doppler, Christian, 207
Dopplerjev pojav, 207–209, 267
drugi Newtonov zakon, 102, 107
Du Nouyeva metoda, 174
dušeno nihanje, 152, 153
dviganje bremena, 65, 66
- elastična energija, 135
elastičnost, 85
Elea, 35
enačba leče, 247

- enačbe, 20
 energija, 131
 energija nihanja, 145
 energija, elastična, 135
 energija, kinetična, 135
 energija, ohranitev, 136
 energija, potencialna, 134
 enote, 16
 enote, osnovne, 16

 Fahrenheit, Daniel Gabriel, 215
 fazni prehod, 227
 fizično nihalo, 148, 149
 fon, 207
 Forbesovi pasovi, 162
 frekvenca, 50, 144
 frekvenca nihanja, 144, 147,
 149–151
 funkcije, 19

 Galen, 11
 Galilei, Galileo, 40, 101, 266
 Gauss, Karl Friderich, 25
 Gaussova porazdelitev, 25
 gibalna količina, 107
 gibanj, sestavljeno, 42
 gibanje, 33
 gibanje tekočin, 179
 gibanje, pospešeno, 38, 39
 glasnost, 207
 golenica, torzijski zlom, 93
 gorišče, 242, 246, 248
 goriščna razdalja, 246, 249
 gostota, 162
 gostota toplotnega toka, 232
 gostota, tabela, 163
 grška abeceda, 29
 graf, 18
 Guericke, Otto von, 106

 Hall, Chester Moor, 250
 harmonično nihanje, 145

 hidrodinamika, 179
 hidrostatični tlak, 164, 166
 hitrost, 36, 37
 hitrost svetlobe, 266, 267
 hitrost zvoka, 204
 hitrost zvoka, tabela, 205
 hitrost, kotna, 49
 hitrost, nadzvočna, 210
 hitrost, obodna, 50
 hitrost, povprečna, 36
 hitrosti padanja, 192
 Hooke, Robert, 253
 Hookov mikroskop, 254
 Hookov zakon, 86, 103, 253
 Hubble, Edwin, 268, 269
 Hubblova konstanta, 269

 idealni plin, 220

 jakost zvoka, 205
 jakost zvoka, tabela, 206
 Jena, 251
 joule, 133
 Joule, James Prescott, 133

 kapaciteta, specifična toplotna, 223
 kapilarni dvig, 175, 176
 kapilarni viskozimeter, 190
 kapljica, 175–178
 kefeidne spremenljivke, 268
 kinematika, 34, 100
 kinetična energija, 135, 225
 količnik lepenja, 121, 123
 količnik lepenja, tabela, 123
 količnik trenja, 123
 količnik trenja, tabela, 123
 končna hitrosti padanja, 193
 konkavna leča, 248, 249
 konkavno zrcalo, 260
 konvekcija, 232
 konveksna leča, 247, 248
 konveksno zrcalo, 261

- Kopernik, Nikolaj, 42
 kost, modul elastičnosti, 89
 kost, trdnost, 89
 kotna hitrost, 49
 kotni pospešek, 50
 kroženje, 49
 kroženje, enakomerno, 50
 kroženje, pospešeno, 52
 krožna frekvenca, 144
 krogelno korigirani objektiv, 250
 kuhalnik, bencinski, 213
 kuhalnik, plinski, 238

 laminaren tok, 179
 latentna toplota, 226, 227
 leče, 246
 leče, barvna napaka, 249
 leče, konkavna, 248, 249
 leče, konveksna, 247, 248
 leče, krogelna napaka, 249
 leče, oblike, 246
 leče, preslikava, 247–249
 leče, sferična aberacija, 249
 leče, zgodovina, 242
 Leeuwenhoek, Anthoni van, 251
 Leeuwenhoekov mikroskop, 252, 253
 Leitz, 252
 lepenje, 120
 letalsko krilo, 183
 linearna regresija, 19
 lom svetlobe, 242
 lomni količnik, 242, 251
 lomni količnik tabela, 244, 250
 lomni zakon, 242
 Lowettova metoda, 78

 Mach, Ernest, 210
 Machovo število, 210
 Magdenburški poskus, 99, 106
 masa, 17, 76, 102
 masa telesnih segmentov, 79
 masno središče, 113
 matematično nihalo, 146
 meglica M51, 268
 mehanika, 11
 mehurček, 176
 meja slišnosti, 205
 mejni kot, 245
 Mer de Glace, 161, 162
 merjenje hitrosti, 209
 met, navpični, 47
 met, poševni, 48
 met, vodoravni, 45
 metabolna poraba energije, tabela, 230
 Michelson, Albert A., 266
 Micrographia, 254
 mikroskop, Hookov, 254
 mikroskop, laboratorijski, 241
 mikroskop, Leeuwenhoekov, 252, 253
 mikroskop, sestavljen, 253
 mikroskopija, fazni kontrast, 256, 257
 mikroskopija, Hoffmanov kontrast, 257
 mikroskopija, temno polje, 255
 moč, 136
 moč, povprečna, 136
 moč, trenutna, 136
 model, 10
 modul elastičnosti, 87, 204
 modul elastičnosti kosti, 89
 modul elastičnosti, tabela, 87
 moment, 60
 moment, ploskovni vztrajnostni, 60, 91
 moment, vztrajnostni, 60, 110
 Morley, E. W., 266
 most, 237
 Muybridge, Eadweard, 11, 12
 napaka, relativna, 24

- napake, 21
napetost, 86
natega, 197
navor, 59, 60, 76, 92, 110, 151
navpični met, 47
nebo, 267
neenačbe, 20
neprožni trk, 109
newton, 86, 102
Newton, Isaac, 100
Newtonov zakon, drugi, 102, 107
Newtonov zakon, prvi, 100, 101, 107
Newtonov zakon, tretji, 105
nihajni čas, 144
nihalo, fizično, 148, 149
nihalo, matematično, 146
nihalo, torzijsko, 151
nihalo, vzmetno, 142
nihanje, amplituda, 143
nihanje, dušeno, 152, 153
nihanje, enačba, 142, 143
nihanje, energija, 145
nihanje, frekvenca, 144
nihanje, harmonično, 145
nihanje, krožna frekvenca, 144
nihanje, vsiljeno, 154, 155
nošnja bremen, 70
nošnja bremena, 68–70

očala, 242
obhodni čas, 50
oblike leč, 246
obodna hitrost, 50
obremenitev, natezna, 86
obremenitev, strižna, 94
obremenitev, tlačna, 86
odboj svetlobe, 257, 258
odbojni zakon, 257, 258
oko, 263
optična os, 246
optična vlakna, 245
optika, 241
osnovne enote, 16

Parmenides, 35
pascal, 166
Pascal, Blaise, 165, 166
Pascaline, 166
Pascalov princip, 165
Perier, Florin, 169
piščal, 203
piščal, Quincejeva, 203
Pisa, 40, 83
plezanja kamina, 125
plin, 220
Plinij, 242
plinska enačba, 221, 222
ploskovni vztrajnostni moment, 60, 90, 91
poševni met, 48
podplati čevljev, 128
podporna ploskev, 77
poise, 188
Poisueille, Jean Léonard Marie, 188
Poisueillejev zakon, 188
pokončna stoja, 79
Pont du Gard, 96
popolen odboj, 245
popolen odboj, mejni kot, 245
porazdelitev, 24
porazdelitev, Gaussova, 25
pospešek, 37, 38, 102
pospešek, kotni, 50
pospešek, radialni, 51
potencialna energija, 134
povečevalno steklo, 248
povprečna vrednost, 23
površinska napetost, 172–175
površinska napetost, tabela, 173
pršilnik, 183

- premica, enačba, 18
premica, smerni koeficient, 18
premikanje predmetov, 124
prevajanje toplote, 232
prevodnost, toplotna, 233
prikaz meritev, 18
princip, 10
prožni trk, 109
projekcija težišča, 79
prosti pad, 39, 40
prvi Newtonov zakon, 100, 101, 107
Puy de Dôme, 169
- Queens College, 132
Quinkejeva piščal, 203
- radar, 209
radialni pospešek, 51
ravno zrcalo, 262, 263
ravnotežje, 9
razširjajoče vesolje, 270
razpršilna leča, 248
raztezek, 86
razteznostni koeficient, 86
reakcija, 105
relativna napaka, 24
relativni raztezek, 86
rentgenska cev, 225
reologija, 11
Reynoldsovo število, 185, 186
rezultanta sil, 58
Richerjeva tehtnica, 78
Robbov vodnjak, 33
Roemer, Ole, 266
Romberg, Moritz, 79
Rosse, 267
- Sahara, 119
Saussure, Horace-Bénédict de, 169
Schott, Otto, 251
sestavljen mikroskop, 253
sestavljeno gibanje, 42
sevanje, 232
sferična aberacija, 249
Sidereus Nuncius, 41
sila, 58, 86, 102
sila na stegnenico, 66, 67
sile na hrbtenico, 62
Sirakuza, 172
skok, 75, 104
sluhovod, 203
smerni koeficient, 18
Snellov zakon, 242
specifična izparilna toplota, 227
specifična izparilna toplota, tabela, 226
specifična sežigna toplota, tabela, 228
specifična talilna toplota, 227
specifična talilna toplota, tabela, 226
specifična toplota, 223
specifična toplota, tabela, 223
specifična toplotna kapaciteta, 223
splošna plinska konstanta, 222
srčni utrip, 131
stabilnost, 76
stabilogram, 80, 81
stabilometrija, 70, 79
standardna deviacija, 23
standardni odklon, 23
Stanič, Valentin, 169
statika, 11, 57, 61, 62, 124, 125
statistika, 23
Stefan, Jožef, 232
steklo, 242
step test, 132
stisljivost, 204
Stokesova enačba, 189
stopinje Celzija, 214
stopinje Kelvina, 214
strižna deformacija, 94
strižni modul, 92, 162
struna, 202

- svetloba, 241
svetloba, odboj, 257
svetlobna hitrost, 266, 267
- škripec, 70, 71
- tabela, 18
teža, 76, 103
težišče, 75, 77
težnostni pospešek, 76
tekočine, gibanje, 179
teleskop, 41, 268
temna snov, 270
temperatura, 214
temperatura zmesi, 229
temperatura, merjenje, 218
temperatura, tabela, 214
temperaturna lestvica, 215
teorem vzporednih osi, 113
teorija, 10
termistor, 220
termočlen, 219, 220
termometer, bimetalni, 219
termometer, električni, 220
termometer, tekočerkristalni, 220
termometer, tekočinski, 218, 219
termometer, uporovni, 220
test stopanja, 131
test stopanja Queens College, 132
tlak, 164, 166
tlak, hidrostatični, 166
tlak, v mirujoči tekočini, 164, 166
tlak, zračni, 168
tok tekočine, 187, 188
tok, laminaren, 179
tok, turbulenten, 179
toplota, 222
toplota, izparilna, 226
toplota, latentna, 226
toplota, sežigna, 228
toplota, specifična, 223
toplota, talilna, 226
toplotna prevodnost, tabela, 233
toplotni raztezek, 217
toplotni raztezek, tabela, 216
torr, 169
Torricelli, Evangelista, 168
torzijska deformacija, 92
torzijski zlom golenice, 93
torzijsko nihalo, 151
trdnost kosti, natezna, 89
trdnost kosti, tlačna, 89
trdnost kosti, torzijska, 93
trdnost kosti, upogibna, 89
trdnost, natezna, 88
trdnost, tlačna, 88
trdnost, torzijska, 93
trenje, 101, 119, 120, 122
tretji Newtonov zakon, 105
trk, neprožni, 109
trk, prožni, 109
trki, 108
turbulenca, 185
turbulenten tok, 179
- udarni val, 210
uho, 205
ultrazvok, 205
upogib, 89
upor tekočine, 189
ura, 141
- Venturijeva cev, 183
vezne posode, 167
Vinci, Leonardo da, 11
viskozimeter, 185, 190, 191
viskozimeter, kapilarni, 190
viskozimeter, Ostwaldov, 190
viskoznost, 185, 188–192
viskoznost, tabela, 186
vodni stolp, 167, 168, 196
vodoravni met, 45
volumski pretok, 188
vrtenje, 109

- vrtilna količina, 115
vsiljeno nihanje, 154, 155
vzgon, 170
vzmetno nihalo, 142
vztrajnost, 101
vztrajnostni moment, 60, 110–114,
150, 151
vztrajnostni moment, ploskovni, 90
vztrajnostni moment, polarni, 92
vztrajnostni radij, 112
vzvod, 61

Watzmann, 169

Youngov modul, 87

zakon, 10

zavore, 165
Zeiss, Carl, 251
Zenon, 34, 35
Zernike, Fritz, 255
zlom goleni, 85
zračni tlak, 168
zrcalni odboj, 258, 259
zrcalo, 257, 258
zrcalo, konkavno, 260
zrcalo, konveksno, 261
zrcalo, ravno, 262, 263
zvok, 201, 204
zvok, hitrost širjenja, 204
zvok, izvor, 202
zvok, zaznava, 205

žarkovni model, 242

